

Fonctions exponentielles : exercices de BAC.

BAC 2013 : session de juin.

On éteint le chauffage dans une pièce d'habitation à 22 h. La température y est alors de 20 °C. *Le but de ce problème est d'étudier l'évolution de la température de cette pièce, puis de calculer l'énergie dissipée à l'extérieur, au cours de la nuit, de 22 h à 7 h le lendemain matin.*

On suppose, pour la suite du problème, que la température extérieure est constante et égale à 11 °C.

On désigne par t le temps écoulé depuis 22 h, exprimé en heures, et par $f(t)$ la température de la pièce exprimée en °C. La température de la pièce est donc modélisée par une fonction f définie sur l'intervalle $[0, 9]$.

Partie A :

1. Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, 9]$.

On admet désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0, 9]$ par $f(t) = 9e^{-0,12t} + 11$.

2. Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.
3. Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15 °C.
5. Retrouver le résultat précédent en résolvant une inéquation.

BAC 2014 : session de juin.

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t est exprimé en heures.

Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. À l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5 °C, sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24 °C.

PARTIE A

La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = 35e^{-1,6t} - 30$.

1. Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes, soit 0,5 h.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f .
3. Si les ailerons de poulet sont laissés une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailerons sera-t-elle conforme au cahier des charges ?
4. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = -24$ et interpréter le résultat trouvé.

Éléments de correction.

BAC 2013

Partie A

- 1) Ceci étant dû aux pertes de chaleur lors des échanges avec l'extérieur plus froid, la fonction f est forcément décroissante.
- 2) On a $f'(t) = 9 \cdot (-0,12) e^{-0,12t} = -1,08 e^{-0,12t} < 0$ pour tout t , ce qui vérifie ce qui a été dit en 1).
- 3) $f(9) \approx \underline{14,1}$ ce qui correspond à la température en °C de la pièce le lendemain à 7h du matin.
- 4) A la minute près, c'est au bout de 6h46 (intersection entre la courbe et la droite d'équation $y = 15$ pour $t \approx 6,76$) donc **à partir de 4h46 du matin**
- 5) On résout $9 e^{-0,12t} + 11 < 15$ soit $e^{-0,12t} < 4/9$ i.e. $-0,12t < \ln(4/9)$ ce qui équivaut à :
$$t > -\frac{\ln(\frac{4}{9})}{0,12} \approx 6,76$$

BAC 2014

Partie A

La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(t) = 35e^{-1,6t} - 30$.

1. Calculons la température atteinte par les ailerons au bout 0,5h :

$$f(0,5) = 35e^{-1,6 \times 0,5} - 30$$

$$f(0,5) = 35e^{-0,8} - 30$$

$$f(0,5) \approx -14,27$$

la température atteinte par les ailerons au bout 30 minutes est donc d'environ -14,27°C.

2. Étude du sens de variations de f :

$$\text{On a : } f'(t) = 35 \times (-1,6) e^{-1,6t} \quad ((e^u)' = u' e^u)$$

$$\text{Donc : } f'(t) = -56e^{-1,6t}$$

Or $-56 < 0$ et $e^{-1,6t} > 0$ pour tout réel t . D'où le tableau de variations suivant :

t	0	$+\infty$
Signe de -56	-	
Signe de $e^{-1,6t}$	+	
Signe de $f'(t)$	-	
Variations de f	5	-30

3. On a : $f(1,5) = 35e^{-2,4} - 30 \approx -26,83$

La température au bout d'une heure et demie est donc inférieure à -24°C.

la température des ailerons sera donc conforme au cahier des charges.

4. On a $f(t) = -24$

$$\Leftrightarrow 35e^{-1,6t} - 30 = -24$$

$$\Leftrightarrow 35e^{-1,6t} = 6$$

$$\Leftrightarrow e^{-1,6t} = \frac{6}{35}$$

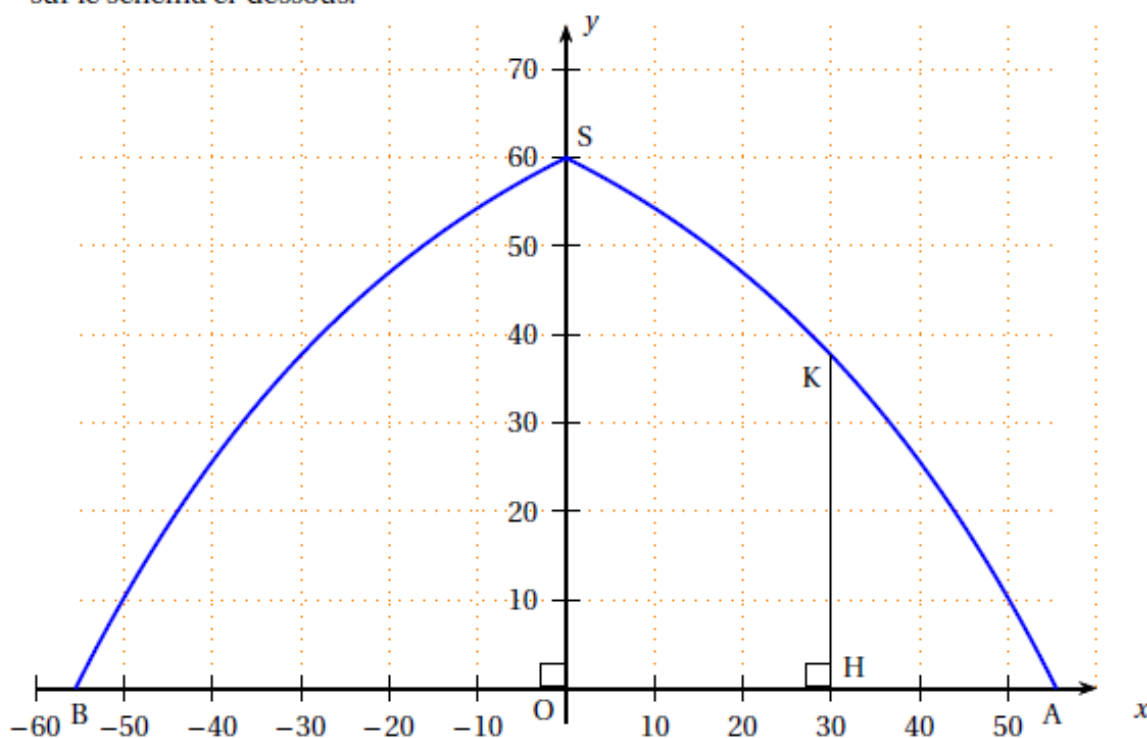
$$\Leftrightarrow -1,6t = \ln\left(\frac{6}{35}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(\frac{6}{35})}{-1,6} \approx 1,10$$

La température des ailerons sera conforme au cahier des charges après environ 1,1h, soit après 1h7min dans le tunnel de congélation.

Un architecte veut établir les plans d'un hangar pour ballon dirigeable.

La forme de la façade avant de ce hangar et les points O, A, B, S, H et K sont donnés sur le schéma ci-dessous.



Cette façade avant est symétrique par rapport au segment vertical [OS] et $OH = 30$ m. L'arc $\widehat{SA}$ de la façade avant correspond à une partie de la représentation graphique d'une fonction définie sur l'intervalle $[0; 60]$, dans un repère orthonormal direct d'origine O du plan, l'unité étant le mètre.

Le cahier des charges impose les quatre conditions suivantes :

- $OS = 60$;
- $HK > 35$;
- la fonction évoquée ci-dessus doit être strictement décroissante sur l'intervalle $[0; 60]$;
- $OA \leq 60$.

Partie A - Étude d'une fonction numérique

1. Vérifier que la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 60]$ par

$$f(x) = 80 - 20e^{0,025x}$$

vérifie les trois premières conditions du cahier des charges.

2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur décimale approchée à 10^{-1} près par excès du réel a qui vérifie $f(a) = 0$.

Vérifier que la quatrième condition du cahier des charges est remplie.

Partie B - Calcul d'intégrale et application

1. a. La fonction F est définie sur l'intervalle $[0; 60]$ par

$$F(x) = 80x - 800e^{0,025x}.$$

Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 60]$.

Correction.

Partie A - Étude d'une fonction numérique

1.
 - $OS = f(0) = 80 - 20e^0 = 80 - 20 = 60$.
 - $HK = f(30) = 80 - 20e^{0,025 \times 30} = 80 - 20e^{0,75} \approx 37,7 > 35$.
 - $f'(x) = -20 \times 0,025e^{0,025x} = -0,5e^{0,025x}$. Comme $e^{0,025x} > 0$ quel que soit le réel x , $f'(x) < 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $[0; 60]$.
2. La calculatrice donne : $f(55) \approx 0,9$; $f(56) \approx -1$, donc $55 < a < 56$.
 $f(55,4) \approx 0,1$ et $f(55,5) \approx -0,1$, donc $55,4 < a < 55,5$.
 $OA = a \approx 55,5$, donc la quatrième est remplie.

Partie B - Calcul d'intégrale et application

1. a. On calcule sur $[0; 60]$ $F'(x) = 80 - 800 \times 0,025e^{0,025x} = 80 - 20e^{0,025x} = f(x)$:
 F est donc bien une primitive de f sur l'intervalle $[0; 60]$.