

logarithmes

Exercice 1

Exprimer chacun des nombres suivants à l'aide de $\ln 2$:

a. $\ln(4)$ b. $\ln(2\sqrt{2})$ c. $\ln(6) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

d. $\ln(2 \cdot e^2)$ e. $\ln\left(\frac{2}{e^3}\right)$ f. $\ln(\sqrt{e^5})$

Correction 1

a. $\ln(4) = \ln(2 \times 2) = \ln 2 + \ln 2 = 2 \cdot \ln 2$

b. $\ln(2\sqrt{2}) = \ln 2 + \ln \sqrt{2} = \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \frac{3}{2} \cdot \ln 2$

c. $\ln(6) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(2 \times 3) - (\ln 3 - \ln 2)$
 $= (\ln 2 + \ln 3) - \ln 3 + \ln 2 = 2 \cdot \ln 2$

d. $\ln(2 \cdot e^2) = \ln 2 + \ln(e^2) = \ln 2 + 2 = 2 + \ln 2$

e. $\ln\left(\frac{2}{e^3}\right) = \ln 2 - \ln(e^3) = \ln 2 - 3 = -3 + \ln 2$

f. $\ln(\sqrt{e^5}) = \frac{1}{2} \cdot \ln(e^5) = \frac{1}{2} \times 5 \cdot \ln e = \frac{1}{2} \times 5 \times 1 = \frac{5}{2}$

Exercice 2

Etablir les égalités suivantes:

a. $\ln(16) + \ln(4) = 6 \cdot \ln 2$ b. $\ln\left(\frac{7}{5}\right) = -\ln\left(\frac{5}{7}\right)$

c. $\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{9}{8}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$ d. $\frac{\ln(\sqrt{8})}{\ln(\sqrt{2})} = 3$

Correction 2

a. $\ln(16) + \ln(4) = \ln(2^4) + \ln(2^2)$
 $= 4 \cdot \ln(2) + 2 \cdot \ln(2) = 6 \cdot \ln 2$

b. $\ln\left(\frac{7}{5}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{5}{7}}\right) = -\ln\left(\frac{5}{7}\right)$

c. $\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{9}{8}\right) = \ln\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{8}}\right) = \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{8}{9}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

d. $\frac{\ln(\sqrt{8})}{\ln(\sqrt{2})} = \frac{\ln(\sqrt{2^3})}{\ln(\sqrt{2})} = \frac{\ln[(\sqrt{2})^3]}{\ln(\sqrt{2})} = \frac{3 \cdot \ln(\sqrt{2})}{\ln(\sqrt{2})} = 3$

Exercice 3

Pour chaque question, préciser l'ensemble de résolution de l'équation puis la résoudre:

a. $\ln(5x+1) = \ln(x-1)$ b. $2 \cdot \ln(3-x) = \ln(2)$

c. $\ln(3x+1) = 5$ d. $3 \cdot e^{2x-1} = 2$

e. $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$ f. $e^{2x} + 4 \cdot e^x - 1 = 0$

Correction 3

a. Le membre de gauche est défini sur $\left]-\frac{1}{5}; +\infty\right[$ et le membre de droite est défini sur $]1; +\infty[$.
Ainsi, cette équation est définie sur $]1; +\infty[$.

On a la résolution suivante:

$$\ln(5x+1) = \ln(x-1)$$

$$e^{\ln(5x+1)} = e^{\ln(x-1)}$$

$$5x+1 = x-1$$

$$4x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Cette valeur n'appartient pas à l'ensemble de définition de cette équation, on en déduit:

$$S = \emptyset$$

b. Cette équation est définie sur l'intervalle $]-\infty; 3[$

On a les transformations suivantes:

$$2 \cdot \ln(3-x) = \ln(2)$$

$$e^{2 \cdot \ln(3-x)} = e^{\ln(2)}$$

$$\left[e^{\ln(3-x)}\right]^2 = 2$$

$$(3-x)^2 = 2$$

$$9 - 6x + x^2 = 2$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

Le polynôme du membre de gauche a pour discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 8$$

On a la simplification suivante: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, on a déduit les deux racines suivantes:

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{2} & = \frac{6 + 2\sqrt{2}}{2} \\ = 3 - \sqrt{2} & = 3 + \sqrt{2} \end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est:

$$S = \{3 - \sqrt{2}\}$$

c. Cette équation est définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$:

De l'égalité, on a:

$$\ln(3x+1) = 5$$

$$e^{\ln(3x+1)} = e^5$$

$$3x+1 = e^5$$

$$x = \frac{e^5 - 1}{3}$$

Cette équation a pour unique solution: $x = \frac{e^5 - 1}{3}$

d. Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{l|l} 3 \cdot e^{2x-1} = 2 & 2x = \ln\left(\frac{2}{3}\right) + 1 \\ e^{2x-1} = \frac{2}{3} & \ln\left(\frac{2}{3}\right) + 1 \\ \ln(e^{2x-1}) = \ln\left(\frac{2}{3}\right) & x = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right) + 1}{2} \\ 2x - 1 = \ln\left(\frac{2}{3}\right) & \end{array}$$

e. Cette équation est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons le changement de variable $X = \ln x$:

$$\begin{aligned} (\ln x)^2 - \ln x - 2 &= 0 \\ X^2 - X - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Le polynôme du second degré du membre de gauche a pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Cette équation admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l} X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-(-1) - 3}{2} & = \frac{-(-1) + 3}{2} \\ = -1 & = 2 \end{array}$$

Cherchons les valeurs de x vérifiant le changement de variable :

$$\begin{array}{l|l} X_1 = -1 & X_2 = 2 \\ \ln x_1 = -1 & \ln(x_2) = 2 \\ e^{\ln x_1} = e^{-1} & e^{\ln(x_2)} = e^2 \\ x_1 = e^{-1} & x_2 = e^2 \end{array}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{e^{-1}; e^2\}$

f. Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$.

Posons le changement de variable : $X = e^x$

L'équation devient :

$$e^{2x} + 4 \cdot e^x - 1 = 0$$

$$(e^x)^2 + 4 \cdot e^x - 1 = 0$$

$$X^2 + 4 \cdot X - 1 = 0$$

Le membre de droite est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 4^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 16 + 4 = 20$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l} X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} & X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\ = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} & = \frac{-4 + 2\sqrt{5}}{2} \\ = -2 - \sqrt{5} & = -2 + \sqrt{5} \end{array}$$

En utilisant le changement de variable $X = e^x$, on en déduit l'unique solution de l'équation de départ :

$$\mathcal{S} = \{\ln(-2 + \sqrt{5})\}$$

Exercice 4

Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, les inéquations suivantes :

a. $5^n \geq 2$

b. $0,1^n \geq 2$

c. $(\ln 2)^n < e^2$

d. $\ln(2^n) - \ln(3^n) \leq 2$

Correction 4

a. Résolvons l'équation suivante :

$$5^n \geq 2$$

La fonction logarithme est croissante :

$$\ln(5^n) \geq \ln(2)$$

$$n \cdot \ln(5) \geq \ln(2)$$

Le nombre $\ln 5$ est strictement positif :

$$n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(5)}$$

On a la valeur approchée : $\frac{\ln 2}{\ln 5} \approx 0,4$.

On en déduit que les solutions de cette équation sont les entiers n tels que :

$$n \geq 1$$

b. Transformons l'inéquation :

$$0,1^n \geq 2$$

La fonction logarithme est croissante :

$$\ln(0,1^n) \geq \ln(2)$$

$$n \cdot \ln(0,1) \geq \ln(2)$$

Le nombre $\ln 0,1$ est strictement négatif :

$$n \leq \frac{\ln(2)}{\ln(0,1)}$$

On a la valeur approchée suivante : $\frac{\ln(2)}{\ln(0,1)} \approx -0,3$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des entiers tels que :

$$n \leq -1$$

c. On a les transformations suivantes :

$$(\ln 2)^n < e^2$$

La fonction logarithme est croissante :

$$\ln[(\ln 2)^n] < \ln(e^2)$$

$$n \cdot \ln[\ln(2)] < 2$$

Le nombre $\ln[\ln(2)]$ est strictement négatif :

$$n > \frac{2}{\ln[\ln(2)]}$$

On a la valeur approchée : $\frac{2}{\ln[\ln(2)]} \approx -5,46$

Les solutions de cette équation sont les entiers n vérifiant :

$$n \geq -5$$

d. On a :

$$\ln(2^n) - \ln(3^n) \leq 2$$

$$\ln\left(\frac{2^n}{3^n}\right) \leq 2$$

$$\ln\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \leq 2$$

$$n \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq 2$$

Le nombre $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ étant strictement négatif :

$$n \geq \frac{2}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

De la valeur approchée : $\frac{2}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx -4,9$

On en déduit l'ensemble des entiers solutions de cette inéquation :

$$n \geq -4$$