FONCTIONS LOGARITHMES

Table des matières

I FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1) Définition.

Dans le tableau des fonctions de référence, il n'y a pas la primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$

THÉORÈME

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$ admet des primitives sur cet intervalle.

Nous savons que toutes les primitives de cette fonction sur cet intervalle diffèrent d'une constante et qu'il existe une seule primitive prenant une valeur donnée pour une valeur fixée de la variable.

En particulier, il existe une seule primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 pour $x = 1$: cette primitive est, par définition, la **fonction logarithme népérien**.

DÉFINITION

La fonction ***logarithme népérien*** est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.

Notation

$$\ln : \begin{cases} x \mapsto \ln x \\ ]0, +\infty[\to \mathbb{R}. \end{cases}$$

Remarque

La fonction ln est une fonction nouvelle : ce n'est ni une fonction polynôme, ni une fonction rationnelle, ni une fonction circulaire, … mais d'après sa définition :

La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout x de $]0, +\infty[$, $\ln' x = \frac{1}{x}$.

Exemples de valeurs de ln x

$\ln 1 = 0$ par définition de la fonction ln.

Pour tout x de $]0, +\infty[$ **une valeur approchée de ln x est accessible par la touche $\boxed{\ln}$ d'une calculatrice.**

Nous obtenons ainsi :

$\ln 2 \approx 0{,}693\,147\,180\,6$, valeur arrondie à 10^{-10},

$\ln 3 \approx 1{,}098\,612\,289$, valeur arrondie à 10^{-9},

$\ln 4 \approx 1{,}386\,294\,361$, valeur arrondie à 10^{-9},

$\ln 6 \approx 1{,}791\,759\,469$, valeur arrondie à 10^{-9},

$\ln \frac{1}{2} \approx -0{,}693\,147\,180\,6$, valeur arrondie à 10^{-10}.

2) Relation fonctionnelle.

En observant les valeurs approchées de ln 2, ln 3 et ln 6, nous constatons que $\ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$ aux erreurs d'arrondis près. De même $\ln(2 \times 2) = \ln 2 + \ln 2$.

Ainsi dans deux cas particuliers nous constatons que le **logarithme d'un produit *ab* est la somme des logarithmes de *a* et de *b***.

Démontrons ce résultat dans le cas général.

Logarithme d'un produit

Soit a un nombre réel fixé quelconque dans $]0, +\infty[$.

Soit g la fonction définie sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(ax)$.

D'après le théorème de dérivation de $x \mapsto f(ax + b)$, dans le cas où $f = \ln$ et $b = 0$, g est dérivable sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ et pour tout x de I, $g'(x) = a[\ln'(ax)]$.

Donc $g'(x) = a\dfrac{1}{ax}$ par définition de la fonction ln.

Donc $g'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \ln(ax)$ ont la même dérivée sur l'intervalle I ; donc la fonction $x \mapsto \ln(ax) - \ln x$, qui a une dérivée nulle, est constante sur I. Il existe donc un nombre réel C tel que, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\ln(ax) - \ln x = C$. Nous obtenons la valeur de la constante C en écrivant que l'égalité précédente est vraie en particulier pour $x = 1$: $\ln a - \ln 1 = C$, ce qui est équivalent à $C = \ln a$ puisque $\ln 1 = 0$.

Nous obtenons donc $\ln(ax) = \ln x + \ln a$, d'où le résultat :

THÉORÈME

Pour tous nombres réels **strictement positifs** a et b, $\mathbf{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$.

Nous allons tirer plusieurs conséquences de cette **propriété fondamentale de la fonction ln**.

Logarithme d'un inverse

En observant les valeurs approchées de ln 2 et $\ln \dfrac{1}{2}$, nous constatons que $\ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$: **le logarithme de l'inverse de 2 est l'opposé du logarithme de 2**.

Démontrons ce résultat dans le cas général.

En remplaçant b par $\frac{1}{a}$ dans le théorème précédent, nous obtenons : pour tout $a > 0$, $\ln 1 = \ln a + \ln \frac{1}{a}$.

Or $\ln 1 = 0$; donc $0 = \ln a + \ln \frac{1}{a}$.

THÉORÈME

Pour tout nombre réel **strictement positif** a, $\mathbf{\ln \frac{1}{a} = - \ln a}$.

Logarithme d'un quotient

Soit a et b des nombres réels strictement positifs.

$\ln \frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right)$, donc $\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b}$ d'après le théorème sur le logarithme d'un produit.

Donc $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ puisque $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$ d'après le théorème ci-dessus.

THÉORÈME

Pour tous nombres réels **strictement positifs** a et b, $\mathbf{\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b}$.

Logarithme d'une puissance

Soit a un nombre réel strictement positif.

$\ln a^2 = \ln(a \times a) = \ln a + \ln a = 2\ln a$ d'après le théorème sur le logarithme d'un produit.

De même $\ln a^3 = \ln(a^2 \times a) = \ln a^2 + \ln a = 2 \ln a + \ln a = 3 \ln a$.

Et ainsi de suite : $\ln a^4 = 4 \ln a$, $\ln a^5 = 5 \ln a$…

Nous admettons que, pour tout nombre entier naturel n, $\ln a^n = n \ln a$.

Ce résultat est encore valable pour $n = 0$ puisque $a^0 = 1$, donc :

$\ln a^0 = \ln 1 = 0$ et $0 \ln a = 0$.

Montrons que ce résultat est encore vrai lorsque n est un nombre entier négatif.

En effet, nous avons dans ce cas, $\ln a^n = \ln \frac{1}{a^{-n}}$.

Or $\ln \frac{1}{a^{-n}} = - \ln a^{-n}$ d'après le résultat sur le logarithme d'un inverse.

Donc $\ln a^n = - \ln a^{-n}$ où $(-n)$ est un nombre entier naturel.

Donc $\ln a^n = -(-n) \ln a$ d'après ce qui vient d'être démontré lorsque l'exposant est positif.

Donc $\ln a^n = n \ln a$ dans le cas où n est un nombre négatif.

En définitive :

THÉORÈME

Pour tout nombre réel a **strictement positif**, pour tout nombre **entier relatif** n, $\mathbf{\ln a^n = n \ln a}$.

Logarithme d'une racine carrée

Soit a un nombre réel strictement positif.

$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ donc $\ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln a$.

Or $\ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a})$ d'après le théorème sur le logarithme d'un produit.

Donc $2\ln(\sqrt{a}) = \ln a$.

THÉORÈME

Pour tout nombre réel a **strictement positif,** $\mathbf{\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a}$.

3) Etude des variations et courbe représentative de la fonction logarithme népérien .

Sens de variation, signe

Par définition de la fonction logarithme népérien, la fonction ln est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$.

Nous en déduisons que la fonction **ln est strictement croissante sur** $\mathbf{]0, +\infty[}$.

Son tableau de variation est donc :

x	0	1	$+\infty$
Variations de ln	‖ ↗	0	↗

Nous en déduisons immédiatement le signe de $\ln(x)$ quand x varie dans $]0, +\infty[$:

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Pour tout x de $]1, +\infty[$, $\ln x > 0$.

Pour tout x de $]0, 1[$, $\ln x < 0$.

Plus généralement on déduit du sens de variation de la fonction ln les équivalences suivantes :

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Pour tous nombres réels, a, b **strictement positifs** :

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$;
- $\ln a \leq \ln b$ si et seulement si $a \leq b$;
- $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$.

Limite de $\ln x$ en $+\infty$

Observons, à l'aide d'une calculatrice, les valeurs prises par $\ln x$ pour des grandes valeurs de x :

Tableau 1

x	10	1 000	10^6	10^9
$\ln x$	2,30	6,91	13,82	20,72

Nous constatons que $\ln x$ augmente « lentement » quand x augmente : pour $x = 1$ milliard, $\ln x$ est encore voisin de 20.

On démontre que :

10^p étant choisi aussi grand que l'on veut, $\ln x$ est supérieur à 10^p dès que x est assez grand.

Cette propriété s'écrit :

CE QU'IL FAUT SAVOIR

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Nous préciserons le comportement de $\ln x$ pour les grandes valeurs de x à la fin de ce paragraphe **C.**.

Limite de $\ln x$ en 0

Observons, à l'aide d'une calculatrice, les valeurs prises par $\ln x$ pour des valeurs de x proches de 0 :

Tableau 2

x	0,1	0,001	10^{-6}	10^{-9}
$\ln x$	– 2,30	– 6,91	– 13,82	– 20,72

En comparant les contenus des tableaux 1 et 2, nous observons que :

- les valeurs de x sont inverses : $0{,}1 = \dfrac{1}{10}$; $0{,}001 = \dfrac{1}{1000}$; …
- les valeurs de $\ln x$ sont opposées.

Ce résultat est général car $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$ pour tout $a > 0$. Nous en déduisons le résultat suivant dont l'interprétation graphique est donnée en remarque.

CE QU'IL FAUT SAVOIR

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty.$$

Remarque

La courbe représentative de la fonction ln admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

Tableau de variation et courbe représentative

La définition et les résultats obtenus ci-dessus permettent d'établir le tableau de variation complet de la fonction ln.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖		+		
Variations de ln	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Pour tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ on détermine les coordonnées d'autant de points que l'on veut avec une calculatrice (figure 1).

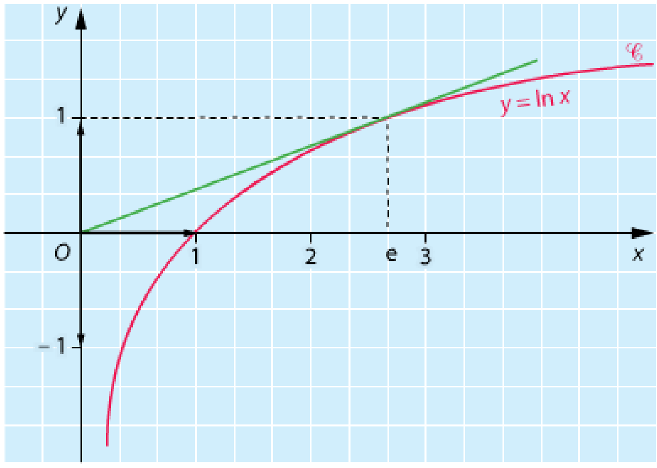

Figure 1

Nombre e

Nous observons graphiquement sur la figure 1 qu'il existe un point unique de la courbe $\mathscr{C}$ ayant pour ordonnée 1 ; son abscisse est voisine de 2,7.

Au-delà de cette observation graphique, l'existence d'une solution unique pour l'équation $\ln x = 1$ repose sur la variation de la fonction ln qui est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et qui prend chaque valeur réelle une fois et une seule quand x varie dans $]0, +\infty[$.

Il existe donc un seul nombre réel x tel que $\ln x = 1$.

DÉFINITION

e est le nombre réel défini par **ln e = 1.**

$e \approx 2{,}718\ 28$ s'obtient sur une calculatrice avec la touche e^x dans le cas où $x = 1$.

Remarque 1

Observez en déplaçant une règle sur la figure 1 que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e semble passer par l'origine O.
Pour le démontrer, écrivons une équation de cette tangente :

$$y - \ln e = \frac{1}{e}(x - e), \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = \frac{1}{e}x \text{ car } \ln e = 1.$$

Ainsi pour $x = 0$, on a $y = 0$: la tangente considérée passe par O.

Remarque 2

Sur la figure 1 nous pouvons observer qu'il existe un point unique de la courbe $\mathscr{C}$ ayant pour ordonnée – 1.

$\ln e = 1$ donc $\ln \frac{1}{e} = -1$ d'après le résultat sur le logarithme de l'inverse.

L'abscisse du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée – 1 est donc $\frac{1}{e} = e^{-1}$.

De même $\ln e^2 = 2\ln e$ d'après le résultat sur le logarithme d'une puissance, $\ln e^2 = 2$ car $\ln e = 1$.
De même $\ln e^3 = 3$, $\ln e^{-2} = -2$, ..., et de façon générale :

CE QU'IL FAUT SAVOIR

Pour tout nombre entier relatif n, $\ln e^n = n$.

De plus, $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}\ln e$, donc $\mathbf{\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}}$.

$\ln\frac{1}{\sqrt{e}} = -\ln\sqrt{e}$, donc $\mathbf{\ln\frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2}}$.

Limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$

Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ après avoir constaté à l'aide d'un tableau de valeurs que $\ln x$ augmente « lentement » quand x devient de plus en plus grand.

Nous observons sur la figure 2 que la courbe représentative de la fonction ln « monte plus lentement » que la droite représentant la fonction $x \mapsto x$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes.

Pour comparer les deux nombres positifs $\ln x$ et x lorsque x devient de plus en plus grand, nous allons étudier leur quotient $\frac{\ln x}{x}$.

x	$100 = 10^2$	$1\,000 = 10^3$	10^6	10^9
$\frac{\ln x}{x}$	0,046	$6{,}91 \times 10^{-3}$	$1{,}38 \times 10^{-5}$	$2{,}07 \times 10^{-8}$

Il semble que, lorsque x devient grand, $\frac{\ln x}{x}$ se rapproche de 0 mais les théorèmes relatifs à la limite d'un quotient ne permettent pas de conclure.

Nous admettons ici le résultat suivant.

THÉORÈME

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Ce résultat peut se retenir sous la forme imagée suivante :

« x l'emporte sur $\ln x$ en $+\infty$ ».

Remarque

Pour tout nombre entier naturel n tel que $n > 1$ et pour tout $x > 0$,

$$\frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ car $n > 1$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ d'après un résultat sur la limite d'un produit.

THÉORÈME

Pour tout nombre entier naturel non nul n,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

II FONCTION COMPOSEE DE LA FORME ln(u)

1) Limites de ln(u)

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[$ par $f(x) = \ln(3x+5)$.

Pour calculer $f(x)$ nous pouvons calculer d'abord $u(x) = 3x+5$, puis calculer $f(x) = \ln(u(x))$. Nous savons que quand x tend vers $+\infty$, $u(x) = 3x+5$ a même limite que $3x$, donc que $u(x)$ tend vers $+\infty$.

x	1 000	10^6	10^9
$u(x) = 3x+5$	3 005	$3 \times 10^6 + 5$	$3 \times 10^9 + 5$
$f(x) = \ln(u(x))$	8,008	14,914	21,822

Nous observons sur le tableau ci-dessus que lorsque x prend des valeurs de plus en plus « grandes », $f(x) = \ln(u(x))$ augmente « lentement », comme $\ln x$.

Nous admettons le résultat suivant qui ressemble au théorème admis pour la limite d'une fonction de la forme u^n.

THÉORÈME

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{X \to b} \ln X = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} \ln(u(x)) = c$.

2) Dérivée de ln(u)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que, pour tout x de I, $u(x) > 0$.

Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$.

Nous admettons le résultat suivant qui ressemble au thèorème admis pour la dérivée d'une fonction de la forme u^n.

THÉORÈME

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

3) Primitives de $\frac{u'}{u}$ où u>0

Nous admettons le théorème suivant qui ressemble au résultat admis pour les primitives d'une fonction de la forme $u'u^n$ où n est un entier relatif différent de – 1.

THÉORÈME

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout élément x de I, $u(x) > 0$.

Les primitives de la fonction f définie sur I par $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ sont définies sur I par $F(x)=\ln[u(x)]+C$, où C est une constante réelle.

III D'AUTRES FONCTIONS LOGARITHMES.

1) Fonction logarithme décimal

DÉFINITION

La fonction ***logarithme décimal*** est la fonction, notée log, définie sur $]0,+\infty[$ par $x \mapsto \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Exemples de valeurs de log *x*

$\log 1 = \frac{\ln 1}{\ln 10} = 0$, car $\ln 1 = 0$.

$\log 10 = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1$;

$\log 100 = \frac{\ln 10^2}{\ln 10} = \frac{2\ln 10}{\ln 10} = 2$.

Plus généralement :

Pour tout nombre entier relatif n, $\log 10^n = n$.

Remarques

- La relation fonctionnelle de la fonction ln et ses conséquences sont encore valables pour la fonction log.
- Les variations de la fonction logarithme décimal sont les mêmes que celles de la fonction ln puisque ln 10 est positif.
- Ce sont les logarithmes décimaux que John Neper a créés.

Avant que ne se développent les calculatrices électroniques on utilisait des tables de logarithmes décimaux pour faire des calculs numériques. Il pouvait alors être intéressant de définir certaines notions à l'aide de la fonction logarithme décimal comme le pH d'une solution ou l'intensité d'un son.

2) Fonction logarithme de base deux.

DÉFINITION

La fonction logarithme de base deux est la fonction, notée $\log_2$, définie sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto \log_2 x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$.

Exemples de valeurs de $\log_2 x$

$\log_2 1 = \dfrac{\ln 1}{\ln 2} = 0$, car $\ln 1 = 0$.

$\log_2 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 2} = 1$.

$\log_2 4 = \dfrac{\ln 2^2}{\ln 2} = \dfrac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2$.

Plus généralement :

pour tout nombre entier relatif n, $\log_2 2^n = n$.

Remarques

- La relation fonctionnelle de la fonction ln et ses conséquences sont encore valables pour la fonction $\log_2$.
- Les variations de la fonction $\log_2$ sont les mêmes que celles de la fonction ln puisque $\ln 2$ est positif.