TD sur la loi exponentielle.

4. ++ **Calculs de probabilités**

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,05.

1. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}) :
$P(X \in [25, 35])$, $P(X \leq 20)$ et $P(X > 40)$.

2. Déterminer l'espérance $E(X)$ et donner une interprétation du résultat.

5. ++ **Calculs de probabilités**

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.

1. Calculer les probabilités suivantes (arrondir à 10^{-3}) :
$P(X \in [1, 3])$, $P(X \leq 6)$ et $P(X > 4)$.

2. Déterminer l'espérance $E(X)$ et donner une interprétation.

35. +++ **Durée de vie de lampes**

T est la variable aléatoire qui, à toute lampe d'un certain type prélevée au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en heures) avant la rupture du filament.

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,000 4.

1. Donner la fonction de densité de T.

2. Calculer les probabilités des événements suivant (arrondir à 10^{-2}) :

A : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevé est comprise entre 2 000 h et 2 800 h »,

B : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevé est inférieure à 3 000 h »,

C : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevé est supérieure à 2 500 h »,

D : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevé est égale à 2 800 h ».

3. Déterminer l'espérance $E(T)$ et donner une interpréta tion du résultat dans le contexte de l'énoncé.

36. +++ **Temps de bon fonctionnement d'une machine**

T est la variable aléatoire qui, à toute machine à embouteiller d'un certain type prélevée au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement (en jours) avant une défaillance.

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,005.

1. Donner la fonction de densité de T.

2. Calculer les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-3}) :

A : « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est comprise entre 150 et 250 jours »,

B : « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est inférieure à 275 jours »,

C : « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est supérieure à 200 jours »,

D : « la durée de bon fonctionnement de la machine prélevée est égale à 220 jours ».

3. Déterminer l'espérance $E(T)$ et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

Eléments de correction.

4.

1. La fonction de densité f de X est définie sur $[0\,,+\infty[$ par $f(t)=0{,}05e^{-0{,}05t}$.

$P(X\in[25\,,35])=\int_{25}^{35}0{,}05e^{-0{,}05t}dt$, donc

$P(X\in[25\,,35])=\left[-e^{-0{,}05t}\right]_{25}^{35}$,

$P(X\in[25\,,35])=-e^{-1{,}75}+e^{1{,}25}=0{,}113$ en arrondissant à 10^{-3}.

De même $P(X\le 20)=\int_{0}^{20}0{,}05e^{-0{,}05t}dt$, donc

$P(X\le 20)=\left[-e^{-0{,}05t}\right]_{0}^{20}$,

$P(X\le 20)=-e^{-1}+1\approx 0{,}632$.

$P(X>40)=1-P(X\le 40)$ en prenant l'évènement contraire.

$P(X>40)=1-\int_{0}^{40}0{,}05e^{-0{,}05t}dt$, donc

$P(X>40)=1-\left[-e^{-0{,}05t}\right]_{0}^{40}$,

$P(X>40)=1+e^{-2}-1$ $P(X>40)=e^{-2}\approx 0{,}135$.

2. $E(X)=\dfrac{1}{0{,}05}$, donc $E(X)=20$.

Lorsqu'une expérience aléatoire faisant intervenir la variable aléatoire X est répétée un très grand nombre de fois ; la moyenne des valeurs prises par X est proche de 20.

5.

Voir le corrigé détaillé de l'exercice 4.

1. $P(X\in[1,3])=\int_{1}^{3}0{,}2e^{-0{,}2}dt$, donc

$P(X\in[1,3])=\left[-e^{-0{,}2t}\right]_{1}^{3}$,

$P(X\in[1,3])=-e^{-0{,}6}+e^{-0{,}2}\approx 0{,}270$.

$P(X\le 6)=\left[-e^{-0{,}2t}\right]_{0}^{6}$, donc

$P(X\le 6)=-e^{-1{,}2}+1\approx 0{,}699$.

$P(X>4)=1-P(X\le 4)$, donc

$P(X>4)=1-\left[-e^{-0{,}2t}\right]_{0}^{4}$,

$P(X>4)=1-\left(-e^{-0{,}8}-1\right)$, donc

$P(X>4)=e^{-0{,}8}\approx 0{,}449$.

2. $E(X)=\dfrac{1}{0{,}2}$, donc $E(X)=5$.

Lorsqu'une expérience aléatoire faisant intervenir la variable aléatoire X est répétée un très grand nombre de fois, la moyenne des valeurs prises par X est proche de 5.

35.

Voir le corrigé détaillé de l'exercice 4.

1. $f(t)=0{,}0004e^{-0{,}0004t}$

2. $P(A)\approx 0{,}12$; $P(B)\approx 0{,}70$; $P(C)\approx 0{,}37$; $P(D)=0$.

3. $E(T)=2\,500h$.

Pour un très grand nombre de lampes de ce type, la moyenne des durées de bon fonctionnement est voisine de 2 500 heures.

36.

Voir le corrigé détaillé de l'exercice 4.

1. $f(t)=0{,}005e^{-0{,}005t}$.

2. $P(A)\approx 0{,}186$; $P(B)\approx 0{,}104$; $P(C)\approx 0{,}923$; $P(D)=0$.

3. $E(T)=200$.

Pour un très grand nombre de machines à embouteiller du type considéré la moyenne des durées de bon fonctionnement est voisine de 200 jours.