LES LOIS A DENSITES : loi exponentielle.

On retrouve la loi exponentielle dans l'étude de fonctionnement d'un matériel non soumis à un phénomène d'usure ou les phénomènes de désintégrations nucléaires.

DÉFINITION

La **loi exponentielle de paramètre** λ, où $\lambda > 0$, est la loi à densité dont la fonction de densité est définie sur $[0, +\infty[$ par :
$f(t) = \lambda e^{-dt}$.

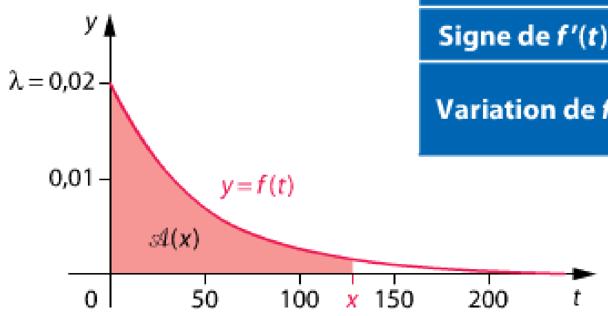
Exemple

Dans le cas particulier où $\lambda = 0{,}02$ on a $f(t) = 0{,}02\, e^{-0{,}02t}$ pour tout t positif.

$f'(t) = -(0{,}02)^2\, e^{-0{,}02t} < 0$.

$f(0) = 0{,}02$ car $e^0 = 1$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}02t = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}02t} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$: la courbe représentative de f a pour asymptote l'axe des abscisses.



t	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	−	
Variation de f	0,02 ↘	0

L'aire de la partie du plan limitée par les axes de coordonnées, la courbe et la droite verticale d'équation $t = x$, où $x > 0$, est :

$\mathcal{A}(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donc ici $\mathcal{A}(x) = \int_0^x 0{,}02\, e^{-0{,}02t}\, dt$.

$\mathcal{A}(x) = [-e^{-0{,}02t}]_0^x$, donc $\mathcal{A}(x) = -e^{-0{,}02x} - (-e^0)$, $\mathcal{A}(x) = 1 - e^{-0{,}02x}$.

Nous venons de démontrer ci-dessus que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0{,}02x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathcal{A}(x) = 1$.

L'aire sous la courbe représentative de la fonction f est égale à 1 unité d'aire, alors que c'est l'aire d'une partie du plan illimitée à droite.

Remarque

Les propriétés obtenues dans le cas particulier où $\lambda = 0{,}02$ restent valables dans le cas général où $\lambda > 0$. Ainsi nous observons que la fonction f satisfait aux trois conditions caractérisant une fonction de densité, mais ici celle-ci est définie sur $[0, +\infty[$ et non sur $[a, b]$.

Calcul de probabilités

On étend à l'intervalle $[0, +\infty[$ les définitions et résultats concernant les variables aléatoires à densité sur $[a, b]$.

À RETENIR

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tout $[x_1, x_2]$ inclus dans $[0, +\infty[$, $\boldsymbol{P(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda e^{-\lambda t} dt}$.

En particulier, pour tout $x \geq 0$, $\boldsymbol{P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt}$.

Exemple

Reprenons le cas où $\lambda = 0{,}02$.

La probabilité que X prenne une valeur comprise entre 20 et 50 est $P(X \in [20, 50]) = \int_{20}^{50} 0{,}02e^{-0{,}02t}\,dt$, donc $P(X \in [20, 50]) = e^{-0{,}4} - e^{-1} \approx 0{,}302$.

La probabilité que X prenne une valeur inférieure ou égale à 100 est $P(X \leq 100) = \int_0^{100} 0{,}02\,e^{-0{,}02t}dt$, donc $P(X \leq 100) = 1 - e^{-2} \approx 0{,}865$.

Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.

DÉFINITION

L'**espérance** d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle est $\boldsymbol{E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t\,f(t)dt}$, où f est la fonction de densité.

Comme $f(t) = \lambda e^{-dt}$, on a $E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt$.

Soit G la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $G(t) = -te^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$.

$G'(t) = -e^{-\lambda t} - t(-\lambda)e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda}(-\lambda)e^{-\lambda t}$,

$G'(t) = -e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}$,

$G'(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

Donc G est une primitive de la fonction $t \mapsto \lambda t e^{-\lambda t}$.

$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}dt = G(x) - G(0)$.

Or $G(0) = -\frac{1}{\lambda}$ par définition de G.

Donc $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}$.

Cherchons la limite en $+\infty$ des deux premiers termes de cette somme.

$-xe^{-\lambda x} = -\frac{x}{e^{\lambda x}} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{e^{\lambda x}}$;

$\lim_{x \to +\infty} \lambda x = +\infty$ car $\lambda > 0$ et $\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ car l'inverse $\frac{e^X}{X}$ a pour limite $+\infty$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} = 0$.

Nous avons déjà démontré que $\lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$, donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} = 0$.

$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt$ est donc la somme de la constante $\frac{1}{\lambda}$ et de deux termes qui ont pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$.

En conclusion, $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$, donc $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

PROPRIÉTÉ

L'**espérance** d'une variable aléatoire X qui suit la **loi exponentielle de paramètre λ** est $\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$.

Ce résultat peut être interprété de la façon suivante : lorsqu'une expérience aléatoire faisant intervenir une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ est répétée un très grand nombre de fois, la moyenne des valeurs prises par X devient voisine de $\frac{1}{\lambda}$.

Exemple

Pour une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}02$, l'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{0{,}02}$, donc $E(X) = 50$.

Vous pouvez observer sur la figure du début du paragraphe **B.** que $E(X) = 50$ est l'abscisse du point où la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 et d'ordonnée $\lambda = 0{,}02$ coupe l'axe des abscisses.

Remarque

Avec un tableur ou une calculatrice on peut simuler une loi exponentielle à partir de la loi uniforme sur]0, 1] ; ceci peut notamment permettre de conforter l'interprétation ci-dessus de l'espérance $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Exercice résolu

ÉNONCÉ

On note T la variable aléatoire qui, à tout composant électronique d'un certain type, prélevé au hasard dans un stock, associe sa durée de fonctionnement (en heure) avant une défaillance.

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre 0,000 5.

On considère que X suit une loi uniforme sur l'intervalle [0, 5].

1° Donner la fonction de densité.

2° Calculer les probabilités des événements suivants (arrondir à 10^{-3}) :

A : la durée de bon fonctionnement du composant prélevé est inférieure à 1 000 heures ;

B : le composant prélevé fonctionne encore au bout de 500 heures ;.

C : la durée de bon fonctionnement du composant prélevé est comprise entre 500 h et 1 000 h.

3° a) Déterminer l'espérance $E(T)$.

b) Donner une interprétation de $E(T)$ dans le contexte de l'énoncé.

MÉTHODE

Utiliser la définition de la loi exponentielle.

Utiliser un résultat sur la loi exponentielle.

Introduire l'événement contraire.

Utiliser un résultat sur la loi exponentielle.

Utiliser $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$.

Utiliser un résultat sur la loi exponentielle.

Appliquer la formule donnant $E(T)$.

SOLUTION

1° Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 0{,}000\,5\mathrm{e}^{-0{,}000\,5t}$.

2° $P(A) = P(T \leq 1\,000)$, donc $P(A) = \int_0^{1000} 0{,}000\,5\mathrm{e}^{-0{,}000\,5t}\,dt$

$P(A) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}393$, les calculs étant effectués avec un tableur ou une calculatrice.

L'événement contraire de B est $\overline{B}$: la durée de bon fonctionnement du composant est inférieure à 500 heures.

Donc $P(\overline{B}) = \int_0^{500} 0{,}000\,5\mathrm{e}^{-0{,}000\,5t}\,dt$,

$P(\overline{B}) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}25} \approx 0{,}221$.

Comme $P(B) = 1 - P(\overline{B})$, on a $P(B) = \mathrm{e}^{-0{,}25}$, $P(B) \approx 0{,}779$.

C est l'événement $T \in [500, 1\,000]$ dont la probabilité est :

$P(500 \leq T \leq 1000) = \int_{500}^{1000} 0{,}000\,5\mathrm{e}^{-0{,}0005t}\,dt$,

$P(B) = \mathrm{e}^{-0{,}25} - \mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 0{,}172$.

3° a) $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$, donc ici $E(T) = \dfrac{1}{0{,}000\,5} = 2\,000$.

b) Pour un très grand nombre de composants prélevés, la moyenne de leur temps de bon fonctionnement est voisine de 2 000 heures.

Dans cet exercice, on étudie la fiabilité d'un dispositif (ici un composant électronique).

Pour l'AFNOR, la **fiabilité** est « la caractéristique d'un dispositif qui s'exprime par la probabilité pour ce dispositif d'accomplir une fonction requise, dans des conditions données, pendant une période donnée ».

Le nombre $E(T)$ est noté habituellement MTBF ; Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement.

À l'origine, MTBF est le sigle de *Mean Time Between Failures*, qui se traduit par « temps moyen entre (deux) défaillances ».