LES LOIS A DENSITES : loi normale.

Loi normale $N(\mu, \sigma)$

L'activité d'approche 3 nous a permis d'observer, sur un exemple, que l'addition de phénomènes aléatoires indépendants et de même loi uniforme conduit à une nouvelle loi, appelée loi normale car son champ d'intervention est très vaste.

Une loi normale intervient dans la modélisation de **phénomènes aléatoires possédant de nombreuses causes indépendantes dont les effets s'ajoutent, sans que l'un d'eux soit dominant**.

Compte tenu de la complexité des processus industriels ou de laboratoire et des phénomènes économiques et sociaux, la loi normale apparaît dans de nombreux secteurs, y compris pour les calculs d'erreurs.

DÉFINITION

La **loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ d'espérance ou de moyenne μ et d'écart type σ** est la loi à densité dont la fonction de densité est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Exemple

La loi normale centrée réduite est la loi $\mathcal{N}(0\,,1)$.

Sa fonction de densité est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Pour tout t réel, $f(-t) = f(t)$: la fonction f est paire et sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

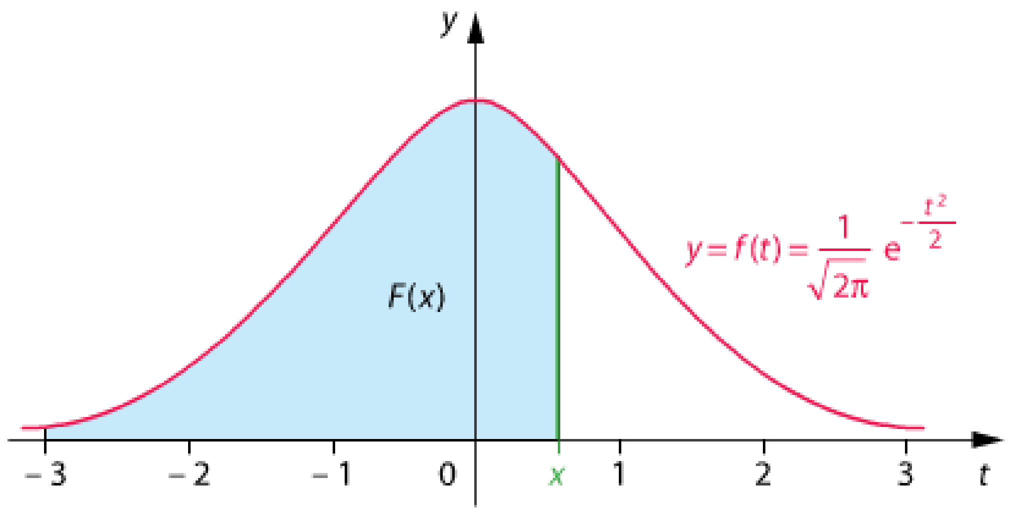
$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{2t}{2}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}$, donc $f'(t) = -\frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ a le signe de $-t$.

$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,4$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} -\frac{t^2}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$
Variation de f	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $\searrow$ 0



Pour la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ on ne connaît pas l'expression algébrique de ses primitives et il en est de même pour la fonction de densité f.

Nous admettons ici que l'aire de la partie du plan limitée par la courbe et l'axe des abscisses, illimitée à gauche et à droite, est égale à 1 unité d'aire.

L'aire $F(x)$ de la partie de plan limitée par la courbe, l'axe des abscisses, la droite verticale d'équation $t = x$ et illimitée à gauche est notée $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

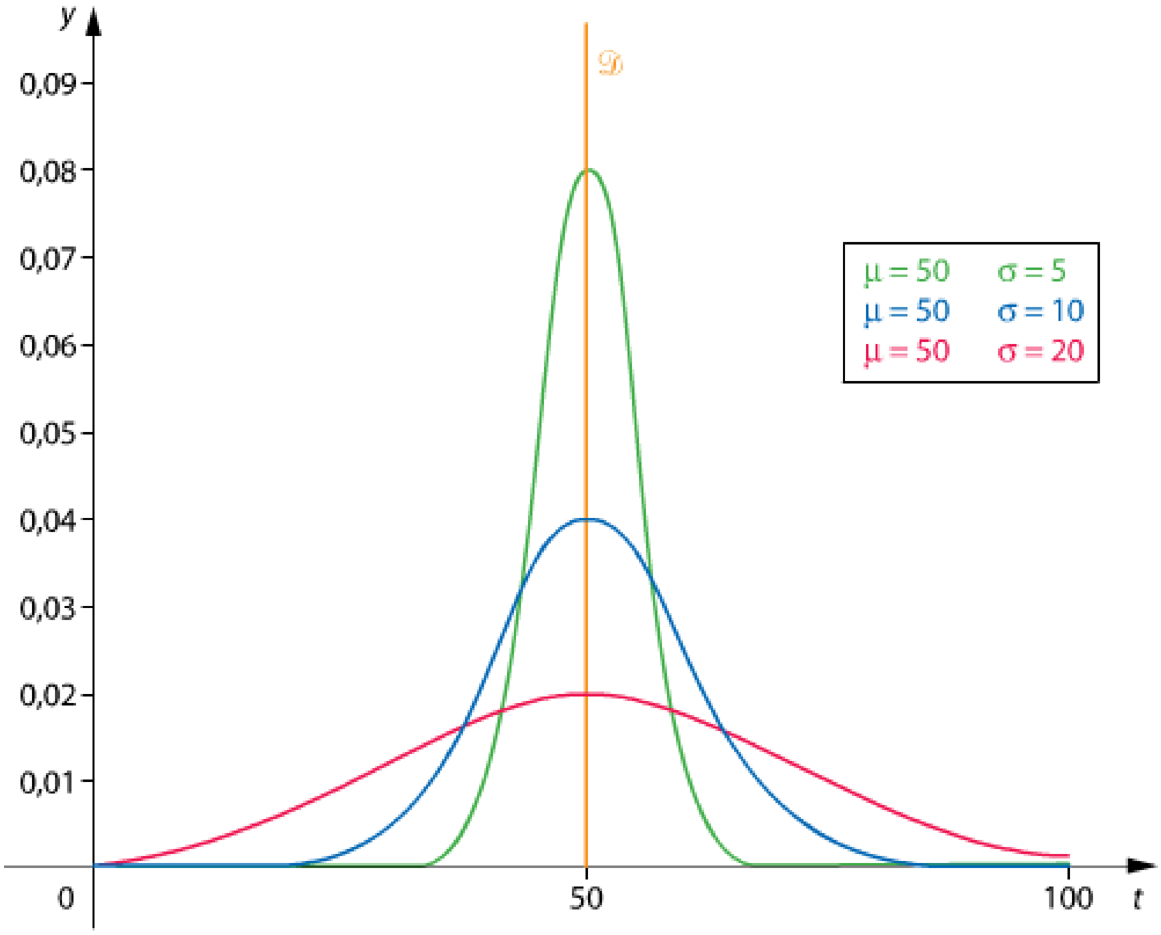
Pour chaque valeur fixée de x, la valeur numérique de $F(x)$ peut être obtenue à l'aide d'un tableur par l'instruction =LOI.NORMALE.STANDARD(x) qui donne, par exemple, $F(1{,}96) \approx 0{,}975$.

Remarque

Dans le cas général où μ et σ sont des nombres réels quelconques, avec $\sigma > 0$, la courbe représentative de la fonction de densité définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$ admet la droite verticale $\mathscr{D}$ d'équation $t = \mu$ comme axe de symétrie.

L'aire de la partie du plan limitée par la courbe et l'axe des abscisses, illimitée à gauche et à droite reste égale à 1 unité d'aire.
Pour une même valeur de μ, l'allure de la courbe est plus ou moins resserrée ou étalée suivant que σ est plus ou moins petit.



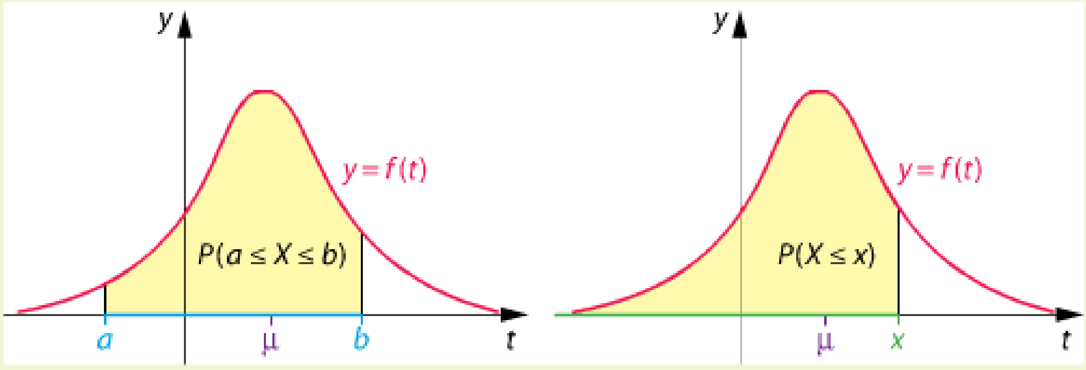
Ces observations graphiques permettent d'expliquer qu'une loi normale peut concerner une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans une partie seulement de $\mathbb{R}$, par exemple $[0, +\infty[$, $[30, 70]$ ou même $[0, 1]$.

Calcul de probabilités

- On étend à $\mathbb{R}$ les définitions et résultats concernant les variables aléatoires à densité sur $[a, b]$ ou $[0, +\infty[$.

À RETENIR

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de fonction de densité f.



Les valeurs numériques de a, b et x étant données, on obtient les valeurs numériques de $P(a \leq X \leq b)$ ou $P(X \leq x)$ en utilisant une calculatrice ou un tableur et en remarquant, si nécessaire, que $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$.

Le **TP3** explique comment obtenir ces probabilités avec une calculatrice.

- Avec un tableur la probabilité $P(X \leq x)$ est obtenue en entrant les valeurs de x, μ et σ dans l'instruction =LOI.NORMALE(x;µ;σ;1) ou =LOI.NORMALE (x;µ;σ;VRAI).

Exemple

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(10\,;15)$.

$P(X \leq 10) = 0{,}5$ et $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 0{,}5$. Ces deux résultats étaient prévisibles car, comme $\mu = 10$, la droite verticale d'équation $t = 10$ est axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction de densité et l'aire totale sous cette courbe est égale à 1.

$P(7 \leq X \leq 13) \approx 0{,}95$; donc ici $P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)] \approx 0{,}95$.

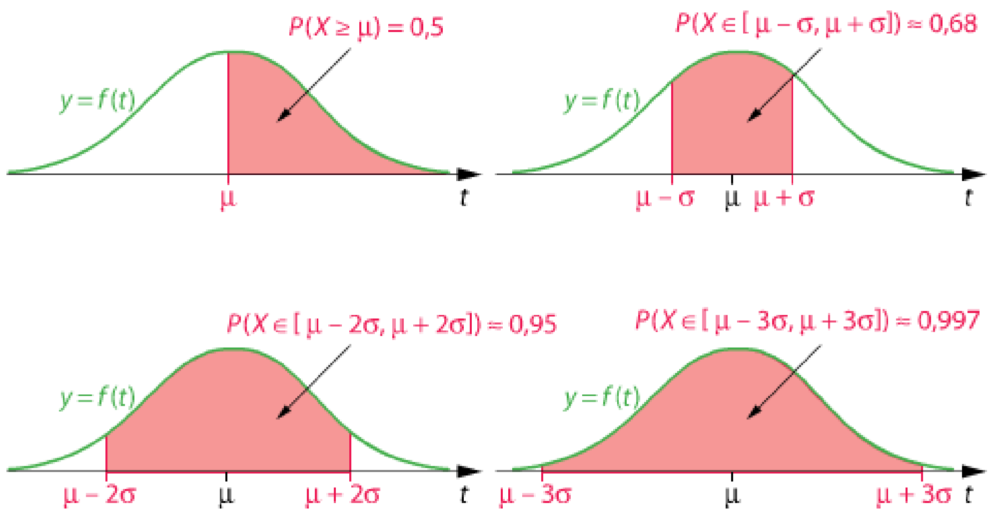
$P(8{,}5 \leq X \leq 11{,}5) \approx 0{,}68$; donc ici $P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma)] \approx 0{,}68$.

$P(5{,}5 \leq X \leq 14{,}5) \approx 0{,}9973$; donc ici $P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)] \approx 0{,}997$.

Nous admettons que ces résultats concernant ces intervalles restent vrais pour une loi normale, quelles que soient les valeurs de l'espérance μ et de l'écart type σ.

À RETENIR

La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.



Remarque

Avec un tableur ou une calculatrice on peut simuler une loi normale à partir de la loi uniforme sur [0, 1].

L'exercice corrigé propose un algorithme à ce sujet en s'appuyant sur la **méthode de convolution**. Celle-ci peut être améliorée par la **transformation de Box-Muller** ou la **méthode ziggourat** qui est une **méthode de rejet** particulière.

Exercice résolu.

ÉNONCÉ

Le cahier des charges de l'usinage d'une tige prévoit pour sa longueur, en cm, l'intervalle de tolérance [4,40 ; 4,80].

Le service qualité constate qu'un premier lot de tiges fabriquées correspond à une distribution normale de moyenne 4,52 cm et d'écart type 0,21 cm.

1° Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit acceptable. Arrondir à 10^{-3}.

2° Après avoir procédé à un réglage, un second lot correspondant à une distribution normale de moyenne 4,7 cm et d'écart type 0,15 cm est usiné. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce second lot soit acceptable. Arrondir à 10^{-3}.

3° a) Quel lot a sa moyenne la plus proche du centre de l'intervalle de tolérance ?

b) Sur quel paramètre l'effet du réglage a été le plus bénéfique ?

MÉTHODE

Définir une variable aléatoire et donner sa loi.

Utiliser un tableur ou une calculatrice pour calculer une probabilité..

Interpréter des résultats dans le contexte de l'énoncé.

SOLUTION

1° Soit X la variable aléatoire qui à toute tige prélevée au hasard dans le premier lot associe sa longueur en cm.

X suit la loi normale $\mathcal{N}(4,52 ; 0,21)$.

La probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit acceptable est $P(X \in [4,40 ; 4,80]) \approx 0,625$.

2° Analogue avec la variable aléatoire Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(4,70 ; 0,15)$.

$P(Y \in [4,40 ; 4,80]) \approx 0,725$.

3° a) $4,60 - 4,52 = 0,08$ et $4,70 - 4,60 = 0,10$.

C'est le premier lot qui a sa moyenne la plus proche du centre de l'intervalle de tolérance.

b) Le réglage a eu pour effet de diminuer l'écart type, c'est-à-dire la dispersion autour de la moyenne, ce qui a amélioré la conformité de la production au cahier des charges.