Suites et bac STI2D

Exercice 2 **6 points**

Après son installation, un lundi matin, un aquarium contient 280 litres d'eau et des poissons.
Par évaporation, le volume d'eau dans l'aquarium diminue de 2 % par semaine. Compte tenu du nombre de poissons, cet aquarium doit contenir en permanence au minimum 240 litres d'eau.

Partie A

1. Quel volume d'eau restera-t-il dans l'aquarium au bout d'une semaine ?
2. Est-il vrai qu'au bout de deux semaines, exactement 4 % du volume d'eau initial se seront évaporés ? Justifier.
3. Déterminer au bout de combien de semaines le volume d'eau dans l'aquarium deviendra insuffisant.

Partie B

On ajoute chaque lundi matin, en une seule fois, 5 litres d'eau pour compenser l'évaporation hebdomadaire de 2 %.
On note u_0 le volume initial d'eau en litres dans l'aquarium. Ainsi $u_0 = 280$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note u_n le volume d'eau dans l'aquarium, en litres, n semaines après son installation, immédiatement après l'ajout hebdomadaire des 5 litres d'eau.

1. Vérifier que $u_2 = 278{,}812$.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}98u_n + 5$.
3. Montrer que la suite (u_n) n'est pas géométrique.
4. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel k désigne un nombre entier naturel et U un nombre réel.

```
U ← 280
Pour k allant de 1 à …
      U ← …
Fin Pour
```

   a. Recopier et compléter l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable U contienne u_6.

   b. Quel est le volume d'eau dans l'aquarium, en litres à 10^{-2} près, 6 semaines après son installation immédiatement après l'ajout hebdomadaire des 5 litres d'eau ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 250$.
   On admet que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98.

   a. Calculer v_0.

   b. Exprimer v_n en fonction de n.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 30 \times 0{,}98^n + 250$.

   d. Justifier que la préconisation concernant le volume d'eau dans l'aquarium est respectée.

Eléments de correction.

Partie B

On ajoute chaque lundi matin, en une seule fois, 5 litres d'eau pour compenser l'évaporation hebdomadaire de 2 %. On note u_0 le volume initial d'eau en litres dans l'aquarium. Ainsi $u_0 = 280$. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le volume d'eau dans l'aquarium, en litres, n semaines après son installation, immédiatement après l'ajout hebdomadaire des 5 litres d'eau.

1. $u_1 = u_0\left(1 - \dfrac{2}{100}\right) + 5 = 280\left(1 - \dfrac{2}{100}\right) + 5 = 279{,}4$;
$u_2 = u_1\left(1 - \dfrac{2}{100}\right) + 5 = 279{,}4\left(1 - \dfrac{2}{100}\right) + 5 = 278{,}812$

2. Retirer 2 % c'est multiplier par 0,98 ; donc on passe du volume l'année n au volume l'année $n+1$ en multipliant par 0,98 puis en ajoutant 5 : pour tout n, $u_{n+1} = 0{,}98u_n + 5$.

3. $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{279{,}4}{280} \approx 0{,}997\,857$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{278{,}812}{279{,}4} \approx 0{,}997\,895$
$\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

4. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel k désigne un nombre entier naturel et U un nombre réel.

```
U ← 280
Pour k allant de 1 à ...
    U ← ...
Fin Pour
```

a. On complète l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable U contienne u_6.

```
U ← 280
Pour k allant de 1 à 6
    U ← 0,98 * U + 5
Fin Pour
```

b. Le tableau suivant donne les valeurs approchées à 10^{-2} de u_n :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	280	279,4	278,81	278,24	277,67	277,12	276,58

La valeur arrondie à 10^{-2} près du volume de l'aquarium au bout de 6 semaines est, en litres, 276,58.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 250$.
On admet que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98.

a. $v_0 = u_0 - 250 = 280 - 250 = 30$.

b. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}98$ et de premier terme $v_0 = 30$ donc, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 30 \times 0{,}98^n$.

c. On sait que $v_n = u_n - 250$ donc $u_n = v_n + 250$. Pour tout n, $v_n = 30 \times 0{,}98^n$ donc, pour tout n, $u_n = 30 \times 0{,}98^n + 250$.

d. Pour tout n, $0{,}98^n > 0$ donc $0{,}98^n + 250 > 250$, ce qui prouve que $u_n > 250$; le volume d'eau sera donc toujours supérieur à 250 litres, donc la préconisation concernant le volume d'eau dans l'aquarium est respectée.