Suites géométriques

Exercice 1

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) géométrique de premier terme 2 et de raison 3.

2. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) géométrique de premier terme 3 et de raison $-\frac{3}{2}$.

Correction 1

1. La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3, elle est définie par les relations :
$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = 3{\cdot}u_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Voici les quatre premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = 2$
- $u_1 = u_0 \times q = 2 \times 3 = 6$
- $u_2 = u_1 \times q = 6 \times 3 = 18$
- $u_3 = u_2 \times q = 18 \times 3 = 54$

2. La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme 3 et de raison $-\frac{3}{2}$, elle est définie par les relations :
$v_0 = 3 \quad ; \quad v_{n+1} = -\frac{3}{2}{\cdot}v_n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Voici les quatre premiers termes de la suite (v_n) :

- $v_0 = 3$
- $v_1 = q \times v_0 = -\frac{3}{2} \times 3 = -\frac{9}{2}$
- $v_2 = q \times v_1 = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{27}{4}$
- $v_3 = q \times v_2 = -\frac{3}{2} \times \frac{27}{4} = -\frac{81}{8}$

Exercice 2

On considère les deux suites de nombres ci-dessous où sont donnés les six premiers termes :

a. $8 \quad ; \quad 4 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{4}$

b. $1 \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 9 \quad ; \quad 18 \quad ; \quad 54 \quad ; \quad 162$

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite géométrique?
Si oui, préciser le premier terme et la raison. Sinon, justifier votre rejet de la conjecture.

Correction 2

a. On remarque que pour passer d'un terme à l'autre, on multiplie par $\frac{1}{2}$. Cela permet de conjecturer que cette suite est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Notons (u_n) cette suite de nombre. On a :
$u_1 = 3 \quad ; \quad u_2 = 9 \quad ; \quad u_3 = 18$

Or, on a les relations suivantes :
$u_2 = 3 \times u_1 \quad ; \quad u_3 = 2 \times u_2$
On en déduit qu'il n'existe pas un seul facteur permettant de passer d'un terme au suivant : la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

Exercice 3*

1. On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = 2{\cdot}u_n + 3^n \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a. Déterminer les cinq premiers termes de (u_n).

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de (u_n)

2. Montrer que la suite géométrique (v_n) de premier terme 1 et de raison 3 vérifie la relation :
$v_{n+1} = 2{\cdot}v_n + 3^n$.

Correction 3

1. a. Les cinq premiers termes de cette suite ont pour valeurs :

- $u_0 = 1$
- $u_1 = 2{\cdot}u_0 + 3^0 = 2 \times 1 + 1 = 3$
- $u_2 = 2{\cdot}u_1 + 3^1 = 2 \times 3 + 3 = 6 + 3 = 9$
- $u_3 = 2{\cdot}u_2 + 3^2 = 2 \times 9 + 9 = 18 + 9 = 27$
- $u_4 = 2{\cdot}u_3 + 3^3 = 2 \times 27 + 27 = 54 + 27 = 81$

   b. En remarquant que le quotient de deux termes consécutifs de la suite est constant :
$\frac{u_1}{u_0} = 3 \quad ; \quad \frac{u_2}{u_1} = 3 \quad \ldots$
On peut conjecturer que la suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3.

2. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3. Son terme de rang n a pour expression :
$v_n = v_0 \times q^n$
$v_n = 1 \times 3^n$
$v_n = 3^n$

On a les transformations algébriques suivantes :
$$2{\cdot}v_n + 3^n = 2 \times 3^n + 3^n = \left(2+1\right){\cdot}3^n = 3 \times 3^n$$
$$= 3^{n+1} = v_{n+1}$$