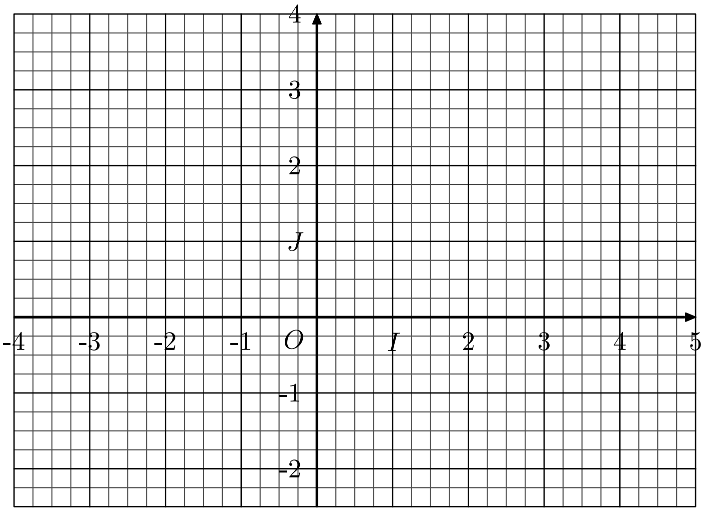
Produit scalaire

Exercice 1

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.



1. On rappelle la formule de la distance entre deux points :
$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$
On considère les trois points du plan A, B et C de coordonnées :
$$A(-3\,;2) \quad ; \quad B(-2\,;-2) \quad ; \quad C(2\,;-1)$$
   a. Déterminer les distances AB, AC et BC.
   b. Etablir que le triangle ABC est un triangle rectangle.

2. Soit $\vec{u}\,(x\,;y)$ un vecteur, on définit la norme du vecteur $\vec{u}$ comme le nombre $\|\vec{u}\|$ défini par :
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
On considère les deux points E et F de coordonnées :
$$E(-1\,;2) \quad ; \quad G(4\,;3)$$
et les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées :
$$\vec{u}\,(4\,;-1) \quad ; \quad \vec{v}\,(1\,;2)$$
   a. Déterminer les normes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   b. Déterminer les coordonnées des points F et H vérifiant les deux égalités vectorielles :
$$\overrightarrow{EF} = \vec{u} \quad ; \quad \overrightarrow{HG} = \vec{v}$$
   c. Exprimer le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ à l'aide des points E, F et G?
   d. Le triangle EFG est-il rectangle?

Correction 1

1. a. On a les distances suivantes :

- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
$= \sqrt{[-2-(-3)]^2 + (-2-2)^2}$
$= \sqrt{(-2+3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1^2 + 16} = \sqrt{17}$
- $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
$= \sqrt{[2-(-3)]^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{(2+3)^2 + (-3)^2}$
$= \sqrt{5^2 + 9} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$
- $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
$= \sqrt{[2-(-2)]^2 + [-1-(-2)]^2}$
$= \sqrt{(2+2)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{4^2 + 1^2}$
$= \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

   b. Le triangle ABC est isocèle en B car :
$AB = BC = \sqrt{17}$
On remarque les valeurs :
- $AB^2 + BC^2 = (\sqrt{17})^2 + (\sqrt{17})^2 = 17 + 17 = 34$
- $AC^2 = (\sqrt{34})^2 = 34$

On en déduit l'égalité : $AB^2 + BC^2 = AC^2$
Si un triangle vérifie l'égalité de Pythagore alors ce triangle est rectangle.
On en déduit que le triangle ABC est rectangle en B.
En conclusion, le triangle ABC est un triangle isocèle en B.

2. a. On a les normes de vecteurs :

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

   b. - L'égalité vectorielle $\overrightarrow{EF} = \vec{u}$ se traduit par l'égalité des coordonnées :
$(x_F - x_E\,; y_F - y_E) = (4\,; -1)$
$(x_F - (-1)\,; y_F - 2) = (4\,; -1)$
$(x_F + 1\,; y_F - 2) = (4\,; -1)$
On en déduit les deux égalités :

$x_F + 1 = 4$	$y_F - 2 = -1$
$x_F = 4 - 1$	$y_F = -1 + 2$
$x_F = 3$	$y_F = 1$

Le point F a pour coordonnées : $F(3\,;1)$

- L'égalité vectorielle $\overrightarrow{HG} = \vec{v}$ se traduit par l'égalité des coordonnées :
$(x_G - x_H\,; y_G - y_H) = (1\,;2)$
$(4 - x_H\,; 3 - y_H) = (1\,;2)$
On en déduit les deux égalités :

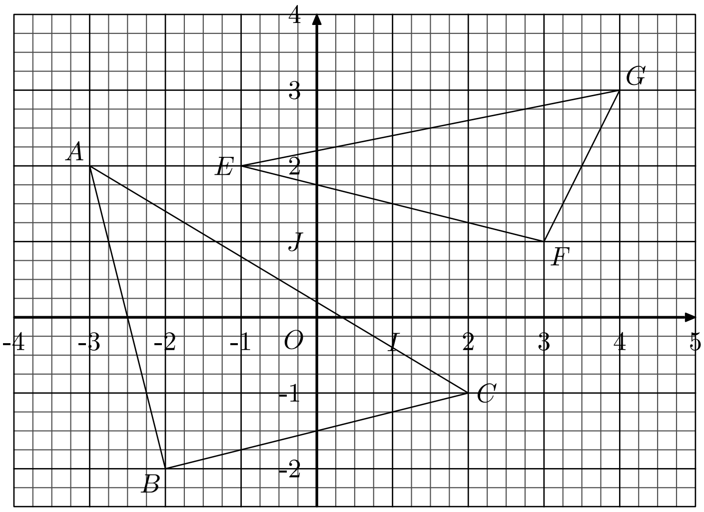
$4 - x_H = 1$	$3 - y_H = 2$
$-x_H = 1 - 4$	$-y_H = 2 - 3$
$-x_H = -3$	$-y_H = -1$
$x_H = 3$	$y_H = 1$

Le point H a pour coordonnées : $H(3\,;1)$
On remarque que les points H et F sont confondus.

   c. On a les égalités vectorielles suivantes :
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EG}$

   d. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :
$\vec{u} + \vec{v}\,(4+1\,;-1+2) = (5\,;1)$
On en déduit la mesure du segment $[EG]$:
$EG = \|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$
On a les valeurs suivantes :
- $EG^2 = (\sqrt{26})^2 = 26$
- $EF^2 + FG^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = (\sqrt{17})^2 + (\sqrt{5})^2$
$= 17 + 5 = 22$

On remarque : $EG^2 \neq EF^2+FG^2$
Si un triangle ne vérifie pas l'égalité de Pythagore alors ce triangle n'est pas rectangle.
Le triangle EFG n'est pas un triangle rectangle.



Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\,(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'\,;y')$.

- Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est un nombre noté $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ défini par :
  $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = x{\cdot}x' + y{\cdot}y'$
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

Dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;I\,;J\right)$ orthonormé, on considère les quatre points suivants :

$A(-3\,;2)$; $B(-2\,;-2)$; $C(2\,;-1)$; $D(1\,;3)$

1. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
2. Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Correction 2

1. On a les coordonnées suivantes des vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=(1\,;-4)$
   - $\overrightarrow{AD}(x_D-x_A\,;y_D-y_A)=(4\,;1)$

   Ainsi, on a la valeur du produit scalaire suivant :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AB}}\cdot x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AB}}\cdot y_{\overrightarrow{AD}}$
   $= 1\times4+(-4)\times1 = 0$
2. Calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$:
   $\overrightarrow{DC}(x_C-x_D\,;y_C-y_D) = (1\,;-4)$

   On remarque ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même coordonnées : ces deux vecteurs sont égaux ; on en déduit que le quadrilatère $ABCd$ est un parallélogramme.

   Or, d'après la question 1., les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux : l'angle $\widehat{BAD}$ est droit.

   Ainsi, $ABCD$ est un parallélogramme et il possède un angle droit : $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 3*

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et les trois points suivants ainsi que leurs coordonnées dans ce repère :

$A(3\,;2)$; $B(5\,;-1)$; $C(-2\,;3)$

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Donner les valeurs des produits scalaires suivants :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$
3. Calculer les distances AB, AC et BC.
4. Déterminer la mesure des 3 angles ABC.

Correction 3

1. On a les coordonnées suivantes de vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$
     $= (5-3\,;-1-2) = (2\,;-3)$
   - $\overrightarrow{AC}(-2-3\,;3-2) = (-5\,;1)$
   - $\overrightarrow{BC}(-2-5\,;3-(-1)) = (-7\,;4)$
2. Voici les calculs des produits scalaires demandés :
   - $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-5)+(-3)\times1 = -10-3 = -13$
   - $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\times(-7)+(-3)\times4 = -14+(-12) = -26$
   - $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} = (-7)\times(-5)+4\times1 = 35+4 = 39$
3. Le calcul de distance permette d'effectuer les calculs suivants :
   - $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
     $= \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
   - $AC = \sqrt{(-5)^2+1^2} = \sqrt{26}$
   - $BC = \sqrt{(-7)^2+4^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$
4. En utilisant l'autre formule donnant le produit scalaire, on obtient :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

$$-13 = \sqrt{13}\times\sqrt{26}\times\cos\widehat{BAC}$$
$$\cos\widehat{BAC} = \frac{-13}{\sqrt{13}\times\sqrt{26}}$$
$$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\Big(\frac{-13}{\sqrt{13}\times\sqrt{26}}\Big)$$
$$\widehat{BAC} \approx 135^o$$

- $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$

$$26 = \sqrt{13}\times\sqrt{65}\times\cos\widehat{ABC}$$
$$\cos\widehat{ABC} = \frac{26}{\sqrt{13}\times\sqrt{65}}$$
$$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\Big(\frac{26}{\sqrt{13}\times\sqrt{65}}\Big)$$
$$\widehat{ABC} \approx 26{,}6^o$$

- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} = BC\times AC\times\cos\widehat{BCA}$

$$39 = \sqrt{65}\times\sqrt{26}\times\cos\widehat{BCA}$$
$$\cos\widehat{BCA} = \frac{39}{\sqrt{65}\times\sqrt{26}}$$
$$\widehat{BCA} = \cos^{-1}\Big(\frac{39}{\sqrt{65}\times\sqrt{26}}\Big)$$
$$\widehat{ABC} \approx 18{,}4^o$$

Exercice 4

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$:

1. Soit A, B, C trois points du plan de coordonnées respective $(-2\,;3)$, $(1\,;-4)$ et $(0\,;-2)$

   a. Déterminer les valeurs de $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\|\overrightarrow{BA}\|$ et $\|\overrightarrow{BC}\|$.

   b. En déduire la mesure de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$ au centième près de degrés.

   c. A l'aide d'un dessin à main levé, donner une mesure de l'angle orienté $\big(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\big)$.

2. Déterminer une mesure de l'angle orienté $\big(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{DF}\big)$ où $D(3\,;5)$, $E(-1\,;0)$, $F(2\,;4)$ au centième de degré près.

Correction 4

1. a. Déterminons les coordonnées des deux vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$

   - $\overrightarrow{BA}(x_A-x_B\,;y_A-y_B) = (-2-1\,;3-(-4))$
     $= (-3\,;7)$
   - $\overrightarrow{BC}(x_C-x_B\,;y_C-y_B) = (0-1\,;\,-2-(-4))$
     $= (-1\,;2)$

   On a ainsi les valeurs suivantes :

   - $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (-3)\times(-1)+7\times2 = 17$
   - $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(-3)^2+7^2} = \sqrt{58}$
   - $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$

   b. Le produit scalaire est donnée également à l'aide de la formule suivante :

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos\widehat{ABC}$$
$$17 = \sqrt{58}\times\sqrt{5}\times\cos\widehat{ABC}$$
$$\cos\widehat{ABC} = \frac{17}{\sqrt{58}\times\sqrt{5}}$$

   Les fonctions trigonométriques inverses permettent d'obtenir la valeur de l'angle géométrique :

$$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\Big(\frac{17}{\sqrt{58}\times\sqrt{5}}\Big) \approx 3{,}37^o$$

   c. A l'aide d'un dessin à la main, on se rend compte que l'angle $\big(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\big)$ est orienté positivement ; on a alors : $\big(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\big) = 3{,}37^o$

2. Le calcul des coordonnées des vecteurs donnent :

$$\overrightarrow{DE}(-4\,;-5)\quad;\quad\overrightarrow{DF}(-1\,;-1)$$

   Ainsi, le produit scalaire $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$ a pour valeur :

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = (-4)\times(-1)+(-5)\times(-1) = 9$$

   La calcul des normes de vecteurs donne :

   - $\|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{(-4)^2+(-5)^2} = \sqrt{41}$
   - $\|\overrightarrow{DF}\| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

   Le produit scalaire de deux vecteurs est également déterminé par la formule suivante :

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = DE\times DF\times\cos\widehat{EDF}$$
$$9 = \sqrt{41}\times\sqrt{2}\times\cos\widehat{EDF}$$
$$\cos\widehat{EDF} = \frac{9}{\sqrt{41}\times\sqrt{2}}$$

   Les fonctions trigonométriques inverses permettent d'écrire :

$$\widehat{EDF} = \cos^{-1}\Big(\frac{9}{\sqrt{41}\times\sqrt{2}}\Big) \approx 6{,}34^o$$

   au centième de degré près.

   Un dessin à la main permet de montrer que l'angle $\big(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{DF}\big)$ est orienté positivement. Ainsi, on a :

$$\big(\overrightarrow{DE}\,;\overrightarrow{DF}\big) = 6{,}34^o$$

Exercice 5

On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;\,I\,;\,J\big)$.

1. On considère les trois points :
   $A(-5\,;1)\quad;\quad B(-3\,;-5)\quad;\quad C(-2\,;2)$.
   Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. On considère les trois points :

$$D(-3\,;-2) \quad ; \quad E(1\,;1) \quad ; \quad F\Big(2\,;-\frac{26}{3}\Big).$$

Montrer que le triangle DEF est rectangle. On précisera le sommet de l'angle droit.

Correction 5

1. On a les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A) = (-3-(-5)\,;\,-5-1)$
  $= (-3+5\,;-6) = (2\,;-6)$
- $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A\,;y_C-y_A) = (-2-(-5)\,;2-1)$
  $= (-2+5\,;1) = (3\,;1)$

On a le produit scalaire :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times3+(-6)\times1 = 6-6 = 0$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux : les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Le triangle ABC est rectangle en A.

2. On a les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{ED}(x_D-x_E\,;y_D-y_E) = (-3-1\,;-2-1)$
  $= (-4\,;-3)$
- $\overrightarrow{FD}\Big(-3-2\,;-2-\big(-\frac{26}{3}\big)\Big) = \Big(-5\,;-\frac{6}{3}+\frac{26}{3}\Big)$
  $= \Big(-5\,;\frac{20}{3}\Big)$

On a le produit scalaire :
$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{FD} = -4\times(-5)+(-3)\times\frac{20}{3} = 20-20 = 0$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont orthogonaux : les droites (ED) et (DF) sont perpendiculaires. Le triangle EDF est rectangle en D.

