

Détail du calcul de l'exercice 9

$$\text{Soit } m > 0, b_{m+1} - b_m = \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+1)!(m+1)} - \frac{1}{m!m}$$

$$= \frac{m(m+1) + m - (m+1)^2}{(m+1)! m (m+1)}$$

$$* \frac{1}{m!m} = \frac{(m+1)^2}{(m+1)m!m(m+1)}$$

$$= \frac{m^2 + m + m - m^2 - 2m - 1}{(m+1)! m (m+1)}$$

$$\text{et } (m+1)m! = (m+1)!$$

$$= \frac{-1}{(m+1)! m (m+1)}$$

$$= \frac{-1}{(m+1)! m (m+1)}$$

Vu au concours Général en 2025

2) e) x_0 est solution de l'équation $x^2(1-x) = d$

$$\text{Posons } h(x) = -x^3 + x^2 - d$$

Étudions les variations de cette fonction sur $[0; +\infty[$

$$\text{Soit } x \geq 0, h'(x) = x(-3x+2)$$

D'où le tableau de variations de h sur $[0; +\infty[$

x	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
h		$h(\frac{2}{3})$	$-\infty$

Diagram showing the function h starting at $-d$ at $x=0$, increasing to a maximum at $x=\frac{2}{3}$ with value $h(\frac{2}{3})$, and then decreasing towards $-\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

$$h(\frac{2}{3}) = \frac{4}{27} - d$$

L'équation $h(x) = 0$ a des solutions sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $h(\frac{2}{3}) \geq 0$ c'est-à-dire $d \leq \frac{4}{27}$.

3) on montre ici que si $0 < d \leq \frac{4}{27}$ alors d vérifie la propriété P.

on montre par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq 0 \quad \frac{2}{3} \leq x_{n+1} \leq x_n \leq 1$$

et x_{n+2} existe*

pour garantir l'existence de la suite (x_n) .

A priori rien ne garantit ici que $u_n > 0$.

* en 2) et on a établi que $2/3$ est solution de $f(x) = x$ ou $x_{n+1} = f(x_n)$

Initialisation = $x_0 = 1 \quad x_1 = 1 - d$

$$0 < d \leq \frac{4}{27} \text{ implique } \frac{2}{3} \leq 1 - d \leq 1$$

• $x_1 > 0$ donc $u_2 > 0$ donc x_2 existe

Hérédité on suppose qu'il existe un entier naturel pour lequel $\frac{2}{3} \leq x_{n+1} \leq x_n \leq 1$ et x_{n+2} existe

$x_{n+1} = f(x_n)$ où f est définie par $f(x) = 1 - \frac{d}{x^2}$
 f est croissante sur $]0; +\infty[$

L'hypothèse de récurrence implique :

$$f\left(\frac{2}{3}\right) \leq x_{n+2}^* \leq x_{n+1} \leq f(1)$$

$$* x_{n+2} = f(x_{n+1})$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$f(1) = 1 - d \leq 1 \text{ car } d > 0$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{9d}{4}$$

$$\text{Si } 0 < d \leq \frac{4}{27} \text{ alors } 1 - \frac{9d}{4} \geq \frac{2}{3}$$

$$\text{Donc } \frac{2}{3} \leq x_{n+2} \leq x_{n+1} \leq 1$$

Par ailleurs $x_{n+2} > 0 \Rightarrow u_{n+3} > 0 \Rightarrow x_{n+3}$ existe.

L'hérédité est établie.

cd $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$ ce qui implique : $u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$