Préparation au concours général, séance du 21 février 2024

<u>Exercice 1 : un peu d'intégration</u>
On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.
On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n\,!}(2-x)^n e^x\,dx$$

1. Calculer I_1.
2. Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$:
$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n\,!}(e^2 - 1)$$
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:
$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$
4. Démontrer par récurrence que :
$$e^2 = 1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^n}{n\,!} + I_n$$
5. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{2^n}{n\,!}$
   a. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geq 3$,
   $$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$$
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, $0 \leq u_n \leq u_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$
6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n)
7. Justifier enfin que :
$$e^2 = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^n}{n\,!}\right)$$

<u>Solution :</u>

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1\,!}(2-x)^1 e^x\,dx = \int_0^2 (2-x)e^x\,dx$
   Soit $u(x) = 2 - x$ et $v'(x) = e^x$
   Donc $u'(x) = -1$ et $v(x) = e^x$
   Les fonctions u, v sont dérivables sur $[0\,;2]$ et u', v' sont continues sur $[0\,;2]$, donc par intégration par parties : $I_1 = [(2-x)e^x]_0^2 - \int_0^2 -e^x\,dx = [(2-x)e^x + e^x]_0^2 = e^2 - 3$.

2. *Sur $[0\,;2]$, $0 \leq 2 - x \leq 2$, donc $0 \leq \dfrac{1}{n\,!}(2-x)^n e^x \leq \dfrac{2^n}{n\,!}e^x$ (car $e^x > 0$ et $n\,! > 0$)*
   Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{n\,!}(2-x)^n e^x$ et $x \longmapsto \dfrac{2^n}{n\,!}e^x$ sont continues sur $[0\,;2]$.
   Donc $\displaystyle\int_0^2 0\,dx \leq \int_0^2 \frac{1}{n\,!}(2-x)^n e^x\,dx \leq \int_0^2 \frac{2^n}{n\,!}e^x\,dx$
   - $\displaystyle\int_0^2 0\,dx = 0$
   - $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{n\,!}(2-x)^n e^x\,dx = I_n$
   - $\displaystyle\int_0^2 \frac{2^n}{n\,!}e^x\,dx = \left[\frac{2^n}{n!}e^x\right]_0^2 = \frac{2^n}{n\,!}(e^2 - 1)$

   Donc $0 \leq I_n \leq \dfrac{2^n}{n\,!}(e^2 - 1)$

3. $I_{n+1} = \int_0^2 \frac{1}{(n+1)!}(2-x)^{n+1}e^x\,dx$

Soit $u(x) = \frac{1}{(n+1)!}(2-x)^{n+1}$ et $v'(x) = e^x$

Donc $u'(x) = -\frac{1}{n\,!}(2-x)^n$ et $v(x) = e^x$

Les fonctions u et v sont dérivables, les fonctions u′ et v′ sont continues sur [0 ; 2]. Donc par intégration par parties :

$$I_{n+1} = \left[\frac{1}{(n+1)!}(2-x)^{n+1}e^x\right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{1}{n\,!}(2-x)^n e^x\,dx$$
$$= 0 - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^2 \frac{1}{n\,!}(2-x)^n e^x\,dx$$
$$= -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n$$

4. Pour $n \geq 1$, on pose $P(n) : e^2 = 1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^n}{n\,!} + I_n$

i. $P(1)$ est vraie car $I_1 = e^2 - 3$

Donc $e^2 = 3 + I_1 = 1 + \frac{2}{1\,!} + I_1$

ii. Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain n

$I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n$

Or par hypothèse de récurrence, $I_n = e^2 - \left(1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^n}{n\,!}\right)$

$$\text{Donc } I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + e^2 - \left(1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^n}{n\,!}\right)$$
$$= e^2 - \left(1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

Donc $e^2 = 1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

D'après le théorème de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$

Donc $e^2 = 1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^n}{n\,!} + I_n$ pour $n \geq 1$.

5. a. Pour tout $n \geq 3$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$. Or $u_n > 0$ donc $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

b. Pour $n \geq 3$, on pose $P(n) : 0 \leq u_n \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

i/ $P(3)$ est vraie car $u_3 \geq 0$ et $u_3 \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^0$

ii/ Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \geq 3$

$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

Or $u_n \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

Donc $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-3}$

Or $u_{n+1} \geq 0$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_3\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-3}$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

De i/, ii/ et le théorème de récurrence, il vient que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

Soit $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ pour $n \geq 3$.

6. $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ *pour* $n \geq 3$

   et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$ *(suite géométrique de raison* $\frac{1}{2} \in]-1\,;\,1[$*)*

   Donc par le théorème des d'encadrement (dit aussi « des gendarmes »), $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

   Or $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n\,!}(e^2 - 1) = u_n(e^2 - 1)$

   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(e^2 - 1) = 0$ *donc par le même théorème,* $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

7. $e^2 = 1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^n}{n\,!} + I_n$

   Donc $1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^n}{n\,!} = e^2 - I_n$

   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

   Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{2}{1\,!} + \frac{2^2}{2\,!} + \ldots + \frac{2^n}{n\,!} = e^2$.

Exercice 2 : des séries très classiques…

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de deux séries (c'est-à-dire des suites définies par des sommes). On note pour $n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, dite somme partielle de la série harmonique alternée.

Partie 1: Utilisation d'une intégrale

1. Calculer pour tout entier naturel p non nul, l'intégrale $\int_0^1 t^p\,dt$.
2. En utilisant la question précédente, démontrer que $S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt$.
3. En déduire que $|S_n - \ln(2)| \leqslant \frac{1}{n+1}$.
4. Conclure quand à la nature de la série harmonique alternée et précisez sa limite.

Partie 2: Utilisation de la série harmonique

1. On note, pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   Montrer que pour tout entier naturel n non nul, nous avons l'encadrement:
   $$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.$$
2. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la série $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $T_n = H_n - \ln(n)$.
   (a) Etudier le sens de variation de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
   (b) En déduire que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ sa limite.

Remarque : cette limite notée γ est appelée **constante gamma d'Euler**.

Solution :

Partie 1: Utilisation d'une intégrale

1. Nous avons $\int_0^1 t^p dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$.

2. Nous avons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt$. Nous pouvons (toujours) intervertir les symboles somme finie et intégrale, d'où:
$$S_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k dt.$$
On reconnait alors la somme des premiers termes d'une série géométrique, de premier terme 1 et de raison $-t$. Aussi, nous en déduisons que $\sum_{k0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$. Il s'ensuit donc que $S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$.

3. Nous avons déjà que $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$. De la précédente égalité, nous en déduisons alors que:
$$|S_n - \ln(2)| = \left|\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt\right| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

4. Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, il en résulte, par le théorème de comparaison des suites ayant même limite, que $\lim_{n \to +\infty} |S_n - \ln(2)| = 0$ ce qui démontre que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et a pour limite $\ln(2)$.

Partie 2: Utilisation de la série harmonique

1. Nous avons $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1]$, par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. En intégrant cette équation pour tout $t \in [k, k+1]$, nous en déduisons $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$ ce qui implique donc que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$. En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à n, nous en déduisons que:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
Il s'ensuit que: $H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq H_n$, soit encore (cette relation étant vraie pour tout n): $\ln(n+1) \leq H_n \leq ln(n) + 1$.

2. (a) $T_{n+1} - T_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Pour étudier le signe de cette quantité, introduisons la fonction $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit alors que $h'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x+(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$. Aussi, la fonction h' est-elle strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim_{x \to 0} h(x) = 1 - \ln(2) > 0$. Il s'ensuit donc que la fonction h est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc $T_{n+1} - T_n \geq 0$. La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante.

   (b) Aussi, la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, et est majorée par 1 (cf. question précédente), d'où cette suite est convergente. Sa limite, γ, vérifie $0 \leq \gamma \leq 1$.

Exercice 3 : un exemple de suite implicite

Une suite implicite est une suite (u_n) de réels dont on a prouvé l'existence, mais dont on ne connait pas la valeur. On dit qu'ils sont définis implicitement. Ces réels sont souvent tous les solutions d'une équation du type $f(x) = constante$, que l'on ne sait pas résoudre, mais dont on prouve l'existence d'une solution par le théorème de la bijection.

Méthode d'étude des suites implicites :

- *Pour prouver l'existence des termes d'une suite implicite, il faut souvent utiliser le théorème de la bijection.*
- *Pour étudier la suite, il faut utiliser l'équation qu'elle vérifie. En effet, on ne connait pas explicitement les termes de la suite, mais on connait en revanche la suite de leurs images par la fonction f. Ainsi, on peut comparer les images pour trouver des propriétés sur la suite.*

Soit n un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.
2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.

Solution :

1. On applique le théorème de la bijection :
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est polynomiale, donc **continue**.
   - f_n est également dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car polynomiale), et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
   $$f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} < 0.$$
   Donc f_n est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}_+$.
   - On a $f_n(0) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$.

D'après le théorème de la bijection, f_n réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$. Puisque $0 \in]-\infty, 1]$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On la note dans la suite u_n.

2. (a) On a $f_n(0) = 1$, $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(1) = -1$. Comme de plus f_n est strictement décroissante, on en déduit que u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.
   (b)

   Puisque f_{n+1} est strictement décroissante et que
   $$f_{n+1}(u_n) \geq 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$
   on en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.

(c) La suite (u_n) est **croissante** et **majorée** (car $u_n \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Par le théorème de la limite monotone, on peut donc conclure que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ finie. De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1.$$

Par passage à la limite dans une inégalité, on obtient donc que $0 \leq \ell \leq 1$.

(d)

Par l'absurde, supposons que $0 \leq \ell < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_n(u_n) = 0 \quad \text{soit } 1 - u_n - u_n^n = 0.$$

(u_n) étant croissante et convergente vers ℓ, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n \leq \ell, \quad \text{d'où} \quad 0 \leq u_n^n \leq \ell^n.$$

Or par hypothèse $0 \leq \ell < 1$, donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell^n = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = 0$. Ainsi tous les termes de l'égalité $1 - u_n - u_n^n = 0$ convergent. Par le théorème de passage à la limite dans les (in)égalités, on en déduit que :

$$1 - \ell - 0 = 0 \quad \text{soit encore } \ell = 1.$$

D'où une contradiction puisque $\ell < 1$ par hypothèse. On peut donc conclure que $\ell = 1$.