

## I. Généralités sur les fonctions

Une fonction  $f$  décrit une relation entre un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée, que l'on note ainsi :

$$f : I \rightarrow J$$

$$x \mapsto f(x)$$

Dans la plupart des exemples rencontrés au lycée, on dispose de formules arithmétiques simples permettant de calculer l'image d'un nombre. Par exemple :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 3x^2 + 4x - 1$$

Il peut aussi arriver que l'on ne dispose pas de formule simple pour décrire l'image d'un réel par une fonction. On se contentera alors de noter cette image  $f(x)$ .

La notion clé à retenir pour une fonction est l'unicité de l'image : A tout nombre de l'ensemble de départ  $I$ , on associe un unique nombre de l'ensemble d'arrivée  $J$

En revanche, un nombre peut avoir plusieurs antécédents : un élément de l'ensemble d'arrivée  $J$  peut être l'image de plusieurs éléments de l'ensemble de départ  $I$ . Prenons l'exemple de la fonction  $f(x) = x^2$ . On sait que 4 est l'image de 2 et de  $-2$ .

De plus, il n'est pas non plus nécessaire que chaque élément de l'ensemble d'arrivée  $J$  soit l'image d'un élément de l'ensemble de départ. Si on reprend notre exemple de référence avec la fonction carré, on peut la décrire comme une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Tous les réels ont bien une unique image par cette fonction. En revanche, les réels négatifs, ne sont l'image d'aucun réel par cette fonction.

**Définition :** La fonction identité notée  $id$  est la fonction définie par :  $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x$$

**Définition :** Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est dite injective si tout réel  $y \in Y$  admet au plus un antécédent dans  $X$ . Dans la pratique cela signifie que si  $f(a) = f(b)$  alors  $a = b$ .

**Exemples :** La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$  est-elle injective ?

La fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  est-elle injective ?

**Solution :**  $f(x) = x^2$  : N'est pas injective car  $f(-2) = f(2)$  alors que  $-2 \neq 2$

$f(x) = \frac{1}{x}$  Oui car si  $x$  et  $y$  sont deux réels non nuls tel que  $f(x) = f(y)$  On a donc  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = y$

**Définition :** Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est dite surjective si tout réel  $y \in Y$  admet au moins un antécédent dans  $X$ .

**Exemples :** La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$  est-elle surjective ?

La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $f(x) = x^2$  est-elle surjective ?

La fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  est-elle surjective ?

**Solution :** Non car si  $y \in \mathbb{R}$  et  $y < 0$  il n'existe pas de réels  $x$  tels que  $y = x^2$

Oui car ici l'ensemble d'arrivée est  $\mathbb{R}^+$  donc si  $y \in \mathbb{R}^+$  on a  $y = x^2$  pour  $x = \sqrt{y}$  ou  $x = -\sqrt{y}$

Oui car si  $y \in \mathbb{R}^*$  on a  $y = f(x)$  pour  $x = \frac{1}{y}$  et  $x \in \mathbb{R}^*$

**Définition :** Une fonction  $f: X \rightarrow Y$  est dite bijective si elle est surjective et injective. C'est-à-dire que pour tout réel  $y \in Y$ , il existe un unique  $x \in X$  tel que  $y = f(x)$ . Tout réel de l'ensemble  $Y$  admet un unique antécédent dans  $X$ .

**Exemples :** La fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $f(x) = x^2$  est-elle bijective ?

Non car elle n'est pas injective.

**Définition :** On considère une fonction  $f: X \rightarrow Y$  bijective. On définit alors la fonction réciproque de  $f$  notée  $f^{-1}$  avec  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  qui à tout réel  $y \in Y$  associe l'unique élément  $x \in X$  vérifiant  $y = f(x)$  ( $x$  est l'unique antécédent de  $y$  par  $f$ ). On a donc  $f^{-1}(y) = x$ .

**Exemple :** Si on considère la fonction  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $f(x) = x^2$ . Expliquez pourquoi cette fonction admet une réciproque et explicitez  $f^{-1}$ .

Vu comme fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  cette fonction est injective. Pour tout réel  $y > 0$  il existe un unique  $x > 0$  tel que  $y = x^2$  il faut prendre  $x = \sqrt{y}$  et donc

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

**Définition :** Soit  $f: X \rightarrow Y$  une fonction et  $I$  une partie de  $X$ .

La fonction  $f$  est dite croissante (respectivement strictement croissante) si pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a \leq b$  (resp.  $a < b$ ) alors  $f(a) \leq f(b)$  (resp.  $f(a) < f(b)$ ).

La fonction  $f$  est dite décroissante (respectivement strictement décroissante) si pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a \geq b$  (resp.  $a > b$ ) alors  $f(a) \geq f(b)$  (resp.  $f(a) > f(b)$ ).

La fonction  $f$  est dite monotone sur  $I$  si elle est croissante sur  $I$  ou décroissante sur  $I$ .

On définit de la même manière la stricte monotonie sur  $I$ .

En résumé, une fonction croissante conserve l'ordre et une fonction décroissante inverse l'ordre.

**Exercice 1 :** Soit  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  strictement monotone sur  $X$ . Prouvez que  $f$  est injective sur  $X$ .

**Solution :** Supposons  $f$  strictement croissante. Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts de  $X$ , avec  $a < b$ .  $f$  étant strictement croissante :  $f(a) < f(b)$ . Autrement dit, si  $a \neq b$  alors  $f(a) \neq f(b)$ .

Si on suppose  $f$  strictement décroissante, un raisonnement analogue permet également de montrer que si  $a \neq b$  alors  $f(a) \neq f(b)$ . On a prouvé dans les 2 cas que  $f$  est injective.

**Exercice 2 :** Prouver que si  $f : X \rightarrow Y$  est une bijection strictement croissante. Alors  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  est également strictement croissante.

**Solution :** Soient  $a, b \in Y$  tels que  $a < b$ .  $f$  étant bijective, il existe deux uniques réels  $x$  et  $y$  de  $X$  tels que  $a = f(x)$  et  $b = f(y)$ .

Comme  $a < b$  on a donc  $f(x) < f(y)$  et  $f$  étant croissante strictement cela implique que  $x < y$ .

Enfin,  $f$  étant bijective et  $f^{-1}$  est sa réciproque :  $a = f(x)$  signifie que  $f^{-1}(a) = x$ . De même  $f^{-1}(b) = y$ . Ainsi,  $x < y$  signifie que  $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$  :  $f^{-1}$  est strictement croissante.

Soit  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : I \rightarrow J$  deux fonctions vérifiant pour tout  $x \in I$  :  $g(x) \in X$ .

**Notation :** La fonction composée de  $g$  par  $f$  est notée  $f \circ g$  se lit «  $f$  rond  $g$  » est définie pour tout  $x \in I$  par :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Il s'agit de la composée de  $g$  suivie de  $f$  : il faut d'abord calculer  $g(x)$  puis l'image de  $g(x)$  par la fonction  $f$ .

**Exemple :** On considère  $f(x) = x^2 - 2$  et  $g(x) = 3x + 1$ . Après avoir donner l'ensemble de définition de  $f \circ g$  expliciter  $f \circ g(x)$ . Même question avec  $g \circ f$ .

$f$  et  $g$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  donc  $f \circ g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ g(x) &= f(g(x)) = f(3x + 1) = (3x + 1)^2 - 2 \\ &f \circ g(x) = 9x^2 + 6x - 1 \end{aligned}$$

De même,  $g \circ f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(x^2 - 2) = 3(x^2 - 2) + 1 \\ &g \circ f(x) = 3x^2 - 5 \end{aligned}$$

On constate avec cet exemple que  $f \circ g \neq g \circ f$  : ce qui est le cas en général. La composition n'est pas commutative en général.

**Exemple :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bijective. Déterminer  $f^{-1} \circ f$  puis  $f \circ f^{-1}$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , comme  $f$  est bijective sur  $\mathbb{R}$ , il existe  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $y = f(x)$  et donc  $x = f^{-1}(y)$

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

Ainsi la fonction  $f^{-1} \circ f$  est la fonction  $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x$$

On démontre de même que  $f \circ f^{-1} = id$

**Théorème :** Soit  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : I \rightarrow J$  deux fonctions vérifiant pour tout  $x \in I$  :  $g(x) \in X$ .

- Si  $f$  et  $g$  sont croissantes alors  $f \circ g$  est croissante.
- Si  $f$  et  $g$  sont décroissantes alors  $f \circ g$  est croissante.
- Si  $f$  est décroissante et  $g$  croissante alors  $f \circ g$  est décroissante
- Si  $f$  est croissante et  $g$  décroissante alors  $f \circ g$  est décroissante

**Preuve :** Soient  $x$  et  $y$  deux réels de l'ensemble  $I$

Supposons  $x < y$

- Si  $f$  et  $g$  sont croissantes : Comme  $g$  est croissante, on a donc :  $g(x) < g(y)$  et  $f$  étant croissante :  $f(g(x)) < f(g(y))$ :  $f \circ g$  est croissante
- Si  $f$  et  $g$  sont décroissantes : Comme  $g$  est décroissante, on a donc :  $g(x) > g(y)$  et  $f$  étant décroissante :  $f(g(x)) < f(g(y))$ :  $f \circ g$  est croissante
- Si  $f$  est décroissante et  $g$  croissante : Comme  $g$  est croissante, on a donc :  $g(x) < g(y)$  et  $f$  étant décroissante :  $f(g(x)) > f(g(y))$ :  $f \circ g$  est décroissante
- Si  $f$  est croissante et  $g$  décroissante : Comme  $g$  est décroissante, on a donc :  $g(x) > g(y)$  et  $f$  étant croissante :  $f(g(x)) > f(g(y))$ :  $f \circ g$  est décroissante

**Exercice 3 :** En décomposant la fonction  $h(x) = |x - 3|$  en fonctions de référence, étudier ses variations.

$$h(x) = f \circ g(x)$$

avec  $f(x) = |x|$  et  $g(x) = x - 3$

**Solution :**  $g$  est une fonction affine strictement croissante.

La fonction  $f$  est décroissante sur  $]-\infty; 0]$  et croissante sur  $[0; +\infty[$

On va donc distinguer ces 2 cas :

$f$  est décroissante sur  $]-\infty; 0]$  donc  $f \circ g$  est décroissante pour  $x$  tel que  $g(x) \leq 0$

Or  $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$  :  $h$  est donc décroissante sur  $]-\infty; 3]$

On montre de même que  $h$  est croissante sur  $[3; +\infty[$

**Définition :**

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction . La fonction  $f$  est dite :

- paire si pour tout  $x \in X$ , on a  $-x \in X$  et  $f(-x) = f(x)$
- impaire si pour tout  $x \in X$ , on a  $-x \in X$  et  $f(-x) = -f(x)$

**Exemple :** La fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est-elle paire ? Non car ici, si  $n \in \mathbb{N}$ ;  $-n \notin \mathbb{N}$

$$n \mapsto n^2$$

La fonction  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  est-elle paire ? Oui car si  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $-n \in \mathbb{Z}$

$$n \mapsto n^2$$

et clairement  $f(n) = f(-n)$

**Definition :**

$f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  est un nombre réel de  $I$ .

- Dire que  $f$  est continue en  $a$  signifie que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- Dire que  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$  signifie que  $f$  est continue en tout réel  $a$  de  $I$ .

**Remarque :** On a également comme définition équivalente :

$f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$

**Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins un réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = k$

**Exercice 4 :** Si  $f$  est continue sur  $[0 ; 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$  montrer que  $f(x) = x$  a au moins une solution

**Solution :** On étudie la fonction  $g$  définie par  $g(x) = f(x) - x$

$g$  est donc continue comme différence de deux fonctions continues.

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \text{ et } g(1) = f(1) - 1$$

- Si  $f(1) = 1$  on a 1 comme solution et c'est fini.

Sinon comme  $f$  est à valeurs dans  $[0, 1]$  alors  $f(1) < 1$  et donc  $f(1) - 1 < 0$

- Soit  $f(0) = 0$  et on a 0 comme solution alors c'est fini.
- Soit  $f(0) \neq 0$  et comme  $f$  est à valeurs dans  $[0, 1]$  cela signifie que  $f(0) > 0$   
Ainsi  $g(0) = f(0)$  est positif et  $g(1) = f(1) - 1$  est négatif. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  possède au moins une solution, notons  $\alpha$  une de ces solutions et  $g(\alpha) = 0$  équivaut à  $f(\alpha) = \alpha$  on a trouvé au moins une solution

**Exercice 5 :**

1. On considère la fonction exponentielle, démontrer que cette fonction réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$
2. La réciproque de cette fonction est la fonction logarithme népérien notée  $\ln$ . Démontrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  strictement positifs,  $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

**Solution :**

1. La fonction exponentielle est continue et croissante strictement de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$  donc d'après le théorème de la bijection,  $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists! x \in \mathbb{R}$  tel que  $y = e^x$ . La fonction exponentielle est donc bien bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$ .
2. On sait que  $e^{x+y} = e^x \times e^y$   
De plus,  $\ln$  étant la réciproque d'exponentielle :  $\forall x > 0; e^{\ln(x)} = x$   
Ainsi si  $a$  et  $b$  strictement positifs :  $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b$   
Et  $a \times b = e^{\ln(a \times b)}$   
En identifiant ces deux égalités, on obtient que  $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a \times b)}$   
Et comme exponentielle est injective :  $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$

**Exercice 6 : Extrait du concours général de 2005 :** Soit  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle  $[0; 1]$ . On suppose que  $f(0) = f(1) = 0$  et que pour tout réel  $x$  de

l'intervalle  $[0; \frac{7}{10}]$  :  $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$ .

1. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  a au moins sept solutions sur  $[0; 1]$ .
2. Donner une fonction  $f$  vérifiant les hypothèses, on pourra se contenter d'une représentation graphique claire.

**Solution :** Considérons la fonction  $g(x) = f\left(x + \frac{3}{10}\right) - f(x)$

1.  $g$  est continue sur l'intervalle  $[0; \frac{7}{10}]$  et ne s'y annule jamais car  $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$ . La fonction  $g$  ne change donc jamais de signe car sinon d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait au moins une fois. Supposons par exemple que  $g$  soit strictement positive.

$$\text{On a donc } \forall x \in \left[0; \frac{7}{10}\right] : f\left(x + \frac{3}{10}\right) > f(x)$$

En particulier pour  $x = 0$  :  $f\left(\frac{3}{10}\right) > f(0) = 0$  :  $f\left(\frac{3}{10}\right)$  est positif

Pour  $x = \frac{3}{10}$  :  $f\left(\frac{6}{10}\right) > f\left(\frac{3}{10}\right)$  puis pour  $x = \frac{6}{10}$  :  $f\left(\frac{9}{10}\right) > f\left(\frac{6}{10}\right)$

On a ainsi :  $f\left(\frac{9}{10}\right) > f\left(\frac{6}{10}\right) > f\left(\frac{3}{10}\right) > 0$

Pour  $x = \frac{7}{10}$  :  $f(1) > f\left(\frac{7}{10}\right)$  et  $f(1) = 0$  donc  $f\left(\frac{7}{10}\right) < 0$

Pour  $x = \frac{4}{10}$  :  $f\left(\frac{7}{10}\right) > f\left(\frac{4}{10}\right)$  et pour  $x = \frac{1}{10}$  :  $f\left(\frac{4}{10}\right) > f\left(\frac{1}{10}\right)$

On a donc :  $f\left(\frac{1}{10}\right) < f\left(\frac{4}{10}\right) < f\left(\frac{7}{10}\right) < 0$

Sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{10}; \frac{3}{10}\right]$   $f$  est continue et change de signe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  s'annule au moins 1 fois sur cet intervalle.

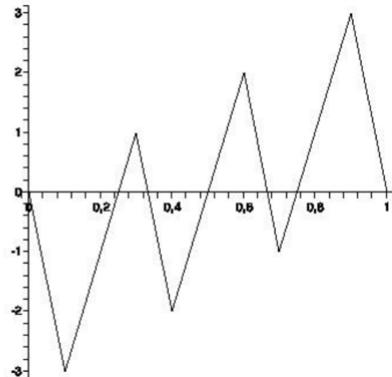
De même, sur les intervalles :  $\left[\frac{3}{10}; \frac{4}{10}\right]$  ;  $\left[\frac{4}{10}; \frac{6}{10}\right]$  ;  $\left[\frac{6}{10}; \frac{7}{10}\right]$  et  $\left[\frac{7}{10}; \frac{9}{10}\right]$

On a donc montré que  $f$  s'annule au moins 5 fois sur l'intervalle  $\left[\frac{1}{10}; \frac{9}{10}\right]$

Enfin, n'oublions pas que  $f(0) = f(1) = 0$  :  $f$  s'annule donc au moins 7 sept fois sur l'intervalle  $[0; 1]$

## 2. Une fonction affine par morceaux et continue convient parfaitement

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, f\left(\frac{1}{10}\right) = -3, f\left(\frac{3}{10}\right) = 1, f\left(\frac{4}{10}\right) = -2, \\ f\left(\frac{6}{10}\right) &= 2, f\left(\frac{7}{10}\right) = -1, f\left(\frac{9}{10}\right) = 3, f(1) = 0 \\ \text{qui vérifie } f\left(x + \frac{3}{10}\right) - f(x) &= 1 \\ \text{pour tout } x &\in \left[0, \frac{7}{10}\right]. \end{aligned}$$



## II. Équations fonctionnelles

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

**Exercice 7 :** Déterminer toutes les fonctions continues de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $f \times f = f$ . C'est-à-dire telles que pour tous réels  $x$  et  $y$  :  $f(x) \times f(y) = f(x)$ .

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x)(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 1$

$f$  ne peut donc prendre que deux valeurs : 1 ou 0.

Supposons que :  $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$  et  $\exists y \in \mathbb{R} : f(y) \neq 0$

Alors  $f$  n'est pas continue : contradiction. De même, si  $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$  alors  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$

Donc  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$  ou  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$

On donc trouvé que si une fonction vérifie l'équation fonctionnelle donnée alors c'est soit la fonction identiquement nulle soit la fonction constante égale à 1.

Cette partie, s'appelle l'analyse : si une fonction  $f$  vérifie l'équation fonctionnelle alors  $f$  est soit identiquement nulle soit constante égale à 1. Il ne faut pas oublier maintenant de vérifier que ces 2 solutions conviennent :

Réciproquement : si  $f$  est la fonction identiquement nulle, elle vérifie clairement  $f \times f = f$

De même, si  $f$  est la fonction constante égale à 1, elle vérifie aussi clairement  $f \times f = f$ .

Conclusion : Les fonctions continues de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $f \times f = f$  sont la fonction identiquement nulle et la fonction constante égale à 1.

### **Bilan : Résoudre des équations fonctionnelles.**

Pour résoudre une équation fonctionnelle, on utilise souvent le raisonnement appelé Analyse/synthèse.

- Analyse : on essaie de collecter des informations sur la fonction : valeur particulière (peut-on trouver  $f(0)$  ?) valeur en laquelle elle s'annule, ... Puis on essaie de trouver la solution ou plutôt une famille de solutions.
- Synthèse : on vérifie ensuite que la solutions trouvées répondent bien au problème donné.

La partie Analyse n'est pas toujours évidente à mettre en place, car on ne dispose pas vraiment d'une méthode générale. En pratiquant, on va constater des procédés de raisonnement qui vont se répéter :

- On teste si des fonctions « évidentes » répondent au problème : fonction constante, identité ou fonction polynôme.
- Peut-on déterminer  $f(0)$  ou  $f(1)$  ? si non, on leur attribuera une valeur et on avance dans le procédé.
- Il peut être aussi intéressant d'étudier la parité de la fonction. Montrer qu'elle est paire ou impaire permet de ne l'étudier ensuite que sur  $\mathbb{R}^+$
- Lorsque plusieurs paramètres interviennent,  $x$  et  $y$ , est-ce que fixer la valeur 0 à l'un deux permet de donner des renseignements intéressants sur la fonction ?

**Exercice 8 :** Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que pour tous réels  $x$  et  $y$  :

$$f(x + y) = f(x) - f(y)$$

**Solution :**

1. On peut déjà constater que la fonction nulle convient.
2. En prenant  $x = y = 0$  on trouve que  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) - f(0) = 0$
3. En prenant  $x = 0$  on obtient que  $\forall y \in \mathbb{R} : f(y) = -f(y)$  ce qui implique que  $f(y) = 0$   
Analyse : Si  $f$  est une solution de l'équation fonctionnelle alors  $f$  est identiquement nulle.  
Synthèse : Etant donné que la fonction nulle vérifie bien l'équation fonctionnelle, on en déduit que la seule solution possible est la fonction nulle.

**Exercice 9 :** Déterminer toutes les fonctions strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f \circ f = id$ . Où  $id$  désigne la fonction identité :  $id : x \mapsto x$ .

**Solution :**

Analyse : La fonction  $f(x) = x$  convient parfaitement, difficile d'en trouver d'autre : on va montrer que c'est la seule solution en raisonnant par l'absurde.

Supposons qu'il existe une fonction  $f$  strictement croissante vérifiant  $f(f(x)) = x$  pour tout réel  $x$  qui ne soit pas la fonction identité, c'est-à-dire qu'il existe un réel  $a$  tel que  $f(a) \neq a$ .

- Soit  $f(a) < a$  et comme  $f$  est strictement croissante :  $f(f(a)) < f(a)$ . Or  $f(f(a)) = a$  et donc  $a < f(a)$  : *absurde*.
- Soit  $f(a) > a$  et comme  $f$  est strictement croissante :  $f(f(a)) > f(a)$ . Or  $f(f(a)) = a$  et donc  $a > f(a)$  : *absurde*.

On obtient donc une contradiction, ce qui signifie que  $f(a) = a$  pour tout réel  $a$  et donc  $f$  est la fonction identité.

Synthèse : La fonction identité vérifie clairement l'équation fonctionnelle.

Conclusion : La seule solution possible est la fonction identité.

**Exercice 10 :** Déterminer toutes les fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues en 0 et vérifiant pour tous réels  $x$  et  $y$  :  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ .

1. Donner des solutions particulières de cette équation fonctionnelle.
2. Si  $f$  est solution de cette équation fonctionnelle. Déterminer  $f(0)$ .
3. Démontrer qu'une fonction  $f$  vérifiant l'équation fonctionnelle est impaire.
4. Si  $f$  est solution de cette équation fonctionnelle montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  
(*Indication : Montrer que  $f$  est continue en  $a$  revient à montrer que  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \dots$* )
5. Si  $n$  est un entier naturel, démontrer par récurrence une formule donnant  $f(n)$  en fonction de  $f(1)$
6. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si  $n$  est un entier relatif
7. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si  $r$  est un rationnel.
8. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si  $x$  est un réel.  
On admettra la propriété suivante : « **Pour tout réel  $x$ , il existe une suite  $(x_n)$  de rationnels (des développements décimaux par exemple) qui converge vers  $x$**  »
9. Conclure

Solution :

1. Donner des solutions particulières de cette équation fonctionnelle.  
Essayons avec les fonctions constantes : Si  $f(x) = k$  est une fonction constante avec  $k$  réel alors  $f(x + y) = k$ . Si de plus  $f$  est solution de l'équation fonctionnelle alors  $f(x + y) = f(x) + f(y) = 2k$ . On obtient que  $k = 2k$  ce qui implique  $k = 0$ . Parmi les fonctions constantes, seule la fonction identiquement nulle convient.  
La fonction identité convient car  $id(x + y) = x + y = id(x) + id(y)$   
Les fonctions affines  $f(x) = ax + b$   
$$f(x + y) = a(x + y) + b = ax + ay + b$$
  
Or  $f(x) + f(y) = ax + b + ay + b = ax + ay + 2b$   
Si  $f$  vérifie l'équation fonctionnelle, on obtient que  $b = 2b$  c'est-à-dire  $b = 0$   
Les seules fonctions affines qui conviennent sont les fonctions linéaires  $f(x) = ax$
2. Si  $f$  est solution de cette équation fonctionnelle. Déterminer  $f(0)$ .  
Avec  $x = 0$  et  $y = 0$  on obtient que  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$  c'est-à-dire  $f(0) = 0$
3. Démontrer qu'une fonction  $f$  vérifiant l'équation fonctionnelle est impaire.  
 $\forall x \in \mathbb{R}$ , l'équation fonctionnelle avec  $y = -x$  nous :  
$$f(x - x) = f(x) + f(-x)$$
  
$$Or f(x - x) = f(0) = 0$$
  
D'où :  $f(x) + f(-x) = 0$  c'est-à-dire :  $f(-x) = -f(x)$  :  $f$  est impaire.
4. Si  $f$  est solution de cette équation fonctionnelle montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$   
Soit  $a$  un réel non nul : Montrer que  $f$  est continue en  $a$  revient à montrer que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$$

Or  $f(a + h) = f(a) + f(h)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a) = f(a)$$

Et par continuité de  $f$  en 0 :  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) = 0$

D'où :  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$  :  $f$  est continue en  $a$ .

Ceci étant vrai pour tout réel  $a$ ,  $f$  est bien continue sur  $\mathbb{R}$ .

5. Si  $n$  est un entier naturel, démontrer par récurrence une formule donnant  $f(n)$  en fonction de  $f(1)$

Regardons quelques exemples :

$$n = 2 : f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$$

$$n = 3 : f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 3f(1) \text{ etc....}$$

Posons, pour tout entier naturel  $n$   $P(n)$  la propriété : «  $f(n) = nf(1)$  »

Démontrons  $P(n)$  par récurrence sur  $n$

Initialisation :  $n = 0 : f(0) = 0 = 0f(1)$  :  $P(0)$  est vérifiée.

Hérité : Supposons  $P(n)$  vraie pour un certain entier naturel  $n$  et montrons que  $P(n + 1)$  est vraie également.

Par hypothèse de récurrence :  $f(n) = nf(1)$

$$f(n + 1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n + 1)f(1)$$

$P(n + 1)$  est vérifiée.

Conclusion :  $P(n)$  est vraie au rang  $n$  et est héréditaire. Par axiome de récurrence  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

6. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si  $n$  est un entier relatif

D'après la question précédente, il faut la relation si  $n \in \mathbb{Z}$  et  $n < 0$ .

Dans ce cas,  $-n \in \mathbb{N}$  et  $f(-n) = -nf(1)$  d'après la question précédente.

Or  $f$  étant impaire :  $f(n) = -f(-n) = nf(1)$  : l'égalité est encore vérifiée.

(Remarque : On peut aussi utiliser la relation  $f(n - n) = f(n) + f(-n)$ )

7. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si  $r$  est un rationnel.

Si  $r \in \mathbb{Q}$  alors  $r = \frac{p}{q}$  avec  $p$  et  $q$  entiers relatifs, et  $q$  non nul.

Ainsi  $f(q \times r) = f(p) = pf(1)$  car  $p$  est un entier relatif et on utilise la question précédente.

Or d'après l'équation fonctionnelle  $f(q \times r) = q(f(r))$

On obtient donc  $qf(r) = pf(1)$

$$f(r) = \frac{p}{q}f(1) = rf(1)$$

L'égalité est encore vérifiée pour les rationnels.

8. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si  $x$  est un réel.

On utilise la propriété donnée : Il existe une suite de rationnels  $(x_n)$  qui converge vers  $x$ .

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right)$$

Et  $f$  étant continue :  $f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n f(1) = xf(1)$

Ainsi pour tout réel  $x$ , on obtient  $f(x) = xf(1)$

9. Conclure :

Analyse : D'après les questions précédentes, on a montré que si une fonction  $f$  est solution de l'équation fonctionnelle, alors  $f(x) = xf(1)$  et en posant  $f(1) = a$ , on obtient que  $f(x) = ax$  c'est-à-dire que  $f$  est linéaire.

Synthèse : Nous avons déjà vérifié que les fonctions linéaires sont bien solution de l'équation fonctionnelle.

Conclusion : Les solutions de l'équation fonctionnelle sont les fonctions linéaires.

**Exercice 11 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue en 0 et en 1 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$$

Montrer que  $f$  est constante.

Indication : commencer par étudier la parité de  $f$ .

Pour tout  $x > 0$ , remarquer  $(x^{\frac{1}{2^n}})$  converge vers 1 et utiliser la continuité de  $f$  en 1.

**Solution :** On peut déjà remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)$$

La fonction  $f$  est paire. Il suffit donc de montrer que  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}^+$

Soit  $x > 0$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$  et que  $f$  est continue en 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(1)$$

Or  $f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f((x^{\frac{1}{2^n}})^2) = f(x^{\frac{1}{2^{n-1}}}) = f(x^{\frac{1}{2^{n-2}}}) = \dots = f(x)$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(x)$

Par unicité de la limite, il vient  $f(x) = f(1)$

$f$  est donc constante et égale à  $f(1)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  puis par parité,  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}^*$

Reste à déterminer  $f(0)$

Comme  $f$  est supposée continue en 0 :  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$f$  étant constante sur  $\mathbb{R}^*$  :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(1)$ .

On a donc :  $f(0) = f(1)$  :  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .

Synthèse : Les fonctions constantes vérifient clairement l'équation fonctionnelle.

Conclusion : Les seules solutions de cette équation fonctionnelle sont les fonctions constantes.

**Exercice 12 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

a) On suppose que  $f(0) = 0$ . Vérifier que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Donner alors la forme de la fonction  $f$

b) On revient au cas général. Déterminer  $f$ .

Solution :

a)  $\forall x \in \mathbb{R} : f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(0)) = \frac{1}{2}f(x)$

Ceci étant vrai pour tout réel  $x$ , on a notamment que :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x+y)$$

Or d'après l'équation fonctionnelle vérifiée par  $f$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2}f(x+y) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

Et donc  $f(x+y) = f(x) + f(y)$

On retrouve l'équation fonctionnelle de Cauchy (exercice 10) et on en déduit que  $f(x) = ax$  avec  $a$  réel

- b) Revnons au cas général : considérons la fonction  $g : x \mapsto f(x) - f(0)$

On a  $g(0) = 0$  et  $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) - f(0) \end{aligned}$$

En remarquant que  $f(0) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0)$  il vient que :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \frac{1}{2}(f(x) - f(0)) + \frac{1}{2}(f(y) - f(0)) \\ &= \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(y) \\ &= \frac{1}{2}(g(x) + g(y)) \end{aligned}$$

Ainsi,  $g$  vérifie l'équation fonctionnelle et  $g(0) = 0$

D'après la question a) :  $g(x) = ax$  avec  $a$  réel.

Par suite  $f(x) = g(x) + f(0) = ax + f(0) = ax + b$  en posant  $b = f(0)$   
 $f$  est donc une fonction affine.

Synthèse : les fonctions affines vérifient bien l'équation fonctionnelle.

Les solutions de cette équation fonctionnelle sont donc les fonctions affines.

**Exercice 13 :** Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Analyse : Soit  $f$  une solution de l'équation fonctionnelle.

En prenant  $x = y = 0$ , on obtient que  $f(0)^2 - f(0) = 0$  soit  $f(0)^2 = f(0)$

Donc  $f(0) = 0$  ou  $f(0) = 1$

Si  $f(0) = 0$  : reprenons l'équation fonctionnelle pour tout réel  $x \neq 0$  et fixons  $y = 0$ .

Il vient :  $f(x)f(0) - f(0) = x$  c'est-à-dire :  $x = 0$  : on obtient une contradiction.

Le cas  $f(0) = 0$  est donc impossible. On a donc  $f(0) = 1$

Reprendons l'équation fonctionnelle pour tout réel  $x \neq 0$  et fixons  $y = 0$

On obtient cette fois :  $f(x)f(0) - f(0) = x$

$$f(x) - 1 = x$$

$$f(x) = x + 1$$

Donc si  $f$  est solution, la seule fonction possible est :  $f(x) = x + 1$

Synthèse : on vérifie que  $f(x) = x + 1$  est bien solution de l'équation fonctionnelle.

Conclusion : L'unique solution est  $f(x) = x + 1$