I. Généralités sur les fonctions

Une fonction f décrit une relation entre un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée, que l'on note ainsi :

$$f\,:\; I \longrightarrow J$$
$$x \mapsto f(x)$$

Dans la plupart des exemples rencontrés au lycée, on dispose de formules arithmétiques simples permettant de calculer l'image d'un nombre. Par exemple :

$$f\,:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 3x^2 + 4x - 1$$

Il peut aussi arriver que l'on ne dispose pas de formule simple pour décrire l'image d'un réel par une fonction. On se contentera alors de noter cette image $f(x)$.

La notion clé à retenir pour une fonction est l'unicité de l'image : A tout nombre de l'ensemble de départ I, on associe un unique nombre de l'ensemble d'arrivée J

En revanche, un nombre peut avoir plusieurs antécédents : un élément de l'ensemble d'arrivée J peut être l'image de plusieurs éléments de l'ensemble de départ I. Prenons l'exemple de la fonction $f(x) = x^2$.On sait que 4 est l'image de 2 et de -2.

De plus, il n'est pas non plus nécessaire que chaque élément de l'ensemble d'arrivée J soit l'image d'un élément de l'ensemble de départ. Si on reprend notre exemple de référence avec la fonction carré, on peut la décrire comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Tous les réels ont bien une unique image par cette fonction. En revanche, les réels négatifs, ne sont l'image d'aucun réel par cette fonction.

Définition : La fonction identité notée id est la fonction définie par : $id\,:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x$$

Définition : Une fonction $f\,: X \longrightarrow Y$ est dite injective si tout réel $y \in Y$ admet au plus un antécédent dans X. Dans la pratique cela signifie que si $f(a) = f(b)$ alors $a = b$.

Exemples : La fonction $f\,:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle injective ?

La fonction $f\,:\; \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est-elle injective ?

Solution : $f(x) = x^2$:N'est pas injective car $f(-2) = f(2)$ alors que $-2 \neq 2$

$f(x) = \frac{1}{x}$ Oui car si x et y sont deux réels non nuls tel que $f(x) = f(y)$ On a donc $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = y$

Définition : Une fonction $f\,: X \longrightarrow Y$ est dite surjective si tout réel $y \in Y$ admet au moins un antécédent dans X.

Exemples : La fonction $f\,:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle surjective ?

La fonction $f\,:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle surjective ?

La fonction $f\,:\; \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est-elle surjective ?

Solution : Non car si $y \in \mathbb{R}$ et $y < 0$ il n'existe pas de réels x tels que $y = x^2$

Oui car ici l'ensemble d'arrivé est $\mathbb{R}^+$ donc si $y \in \mathbb{R}^+$ on a $y = x^2$ pour $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$

Oui car si $y \in \mathbb{R}^*$ on a $y = f(x)$ pour $x = \frac{1}{y}$ et $x \in \mathbb{R}^*$

Définition :

> Une fonction $f\colon\ X \longrightarrow Y$ est dite bijective si elle est surjective et injective. C'est-à-dire que pour tout réel $y \in Y$, il existe un unique $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Tout réel de l'ensemble Y admet un unique antécédent dans X.

Exemples : La fonction $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle bijective ?

Non car elle n'est pas injective.

Définition :

> On considère une fonction $f : X \longrightarrow Y$ bijective. On définit alors la fonction réciproque de f notée f^{-1} avec $f^{-1}\colon Y \to X$ qui a tout réel $y \in Y$ associe l'unique élément $x \in X$ vérifiant $y = f(x)$ (x est l'unique antécédent de y patr f). On a donc $f^{-1}(y) = x$.

Exemple : Si on considère la fonction $f\ :\ \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$. Expliquez pourquoi cette fonction admet une réciproque et expliciter f^{-1}.

Vu comme fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ cette fonction est injective. Pour tout réel $y > 0$ il existe un unique $x > 0$ tel que $y = x^2$ il faut prendre $x = \sqrt{y}$ et donc

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

Définition :

> Soit $f\ : X \to Y$ une fonction et I une partie de X.
>
> La fonction f est dite croissante (respectivement strictement croissante) si pour tous réels a et b de I, si $a \leq b$ (resp. $a < b$) alors $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) < f(b)$).
>
> La fonction f est dite décroissante (respectivement strictement décroissante) si pour tous réels a et b de I, si $a \geq b$ (resp. $a > b$) alors $f(a) \geq f(b)$ (resp. $f(a) > f(b)$).
>
> La fonction f est dite monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.
>
> On définit de la même manière la stricte monotonie sur I.

En résumé, une fonction croissante conserve l'ordre et une fonction décroissante inverse l'ordre.

Exercice 1 : Soit $f\ : X \to \mathbb{R}$ strcitement monotone sur X. Prouvez que f est injective sur X.

Solution : Supposons f strictement croissante. Soient a et b deux réels distincts de X, avec $a < b$. f étant strictement croissante : $f(a) < f(b)$. Autrement dit, si $a \neq b$ alors $f(a) \neq f(b)$.

Si on suppose f strtrictement décroissante, un raisonnement analogue permet également de montrer que si $a \neq b$ alors $f(a) \neq f(b)$. On a prouvé dans les 2 cas que f est injective.

Exercice 2 : Prouver que si $f : X \to Y$ est une bijection strictement croissante. Alors $f^{-1}: Y \to X$ est également strictement croissante.

Solution : Soient $a, b \in Y$ tels que $a < b$. f étant bijective, il existe deux uniques réels x et y de X tels que $a = f(x)$ et $b = f(y)$.

Comme $a < b$ on a donc $f(x) < f(y)$ et f étant croissante strictement cela implique que $x < y$.

Enfin, f étant bijective et f^{-1} est sa réciproque : $a = f(x)$ singifie que $f^{-1}(a) = x$. De même $f^{-1}(b) = y$. Ainsi, $x < y$ signifie que $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$: f^{-1} est strcitement croissante.

Notation :

Soit $f : X \to Y$ et $g : I \to J$ deux fonctions vérifiant pour tout $x \in I$: $g(x) \in X$.

La fonction composée de g par f est notée $f \circ g$ se lit « $f\ rond\ g$ » est définie pour tout $x \in I$ par :

$$(f \circ g)(x) = f((g(x))$$

Il s'agit de la composée de g suivie de f : il faut d'abord calculer $g(x)$ puis l'image de $g(x)$ par la fonction f.

Exemple : On considère $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = 3x + 1$. Après avoir donner l'ensemble de définition de $f \circ g$ expliciter $f \circ g(x)$. Même question avec $g \circ f$

f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f \circ g\ (x) = f\big(g(x)\big) = f(3x + 1) = (3x + 1)^2 - 2$$

$$f \circ g(x) = 9x^2 + 6x - 1$$

De même, $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g \circ f\ (x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2 - 2) = 3(x^2 - 2) + 1$$

$$g \circ f(x) = 3x^2 - 5$$

On constate avec cet exemple que $f \circ g \neq g \circ f$: ce qui est le cas en général.La composition n'est pas commutative en général.

Exemple : Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. Déterminer $f^{-1} \circ f$ puis $f \circ f^{-1}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, comme f est bijective sur $\mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ et donc $x = f^{-1}(y)$

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = x$$

Ainsi la fonction $f^{-1} \circ f$ est la fonction $\quad id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x$$

On démontre de même que $f \circ f^{1} = id$

Théorème :

Soit $f : X \to Y$ et $g : I \to J$ deux fonctions vérifiant pour tout $x \in I$: $g(x) \in X$.

- Si f et g sont croissantes alors $f \circ g$ est croissante.
- Si f et g sont décroissantes alors $f \circ g$ est croissante.
- Si f est décroissante et g croissante alors $f \circ g$ est décroissante
- Si f est croissante et g décroissante alors $f \circ g$ est décroissante

Preuve : Soient x et y deux réels de l'ensemble I

Supposons $x < y$

- Si f et g sont croissantes : Comme g est croissante, on a donc : $g(x) < g(y)$ et f étant croissante : $f\big(g(x)\big) < f\big(g(y)\big)$: $f \circ g$ est croissante
- Si f et g sont décroissantes : Comme g est décroissante, on a donc : $g(x) > g(y)$ et f étant décroissante : $f\big(g(x)\big) < f\big(g(y)\big)$: $f \circ g$ est croissante
- Si f est décroissante et g croissante : Comme g est croissante, on a donc : $g(x) < g(y)$ et f étant décroissante : $f\big(g(x)\big) > f\big(g(y)\big)$: $f \circ g$ est décroissante
- Si f est croissante et g décroissante : Comme g est décroissante, on a donc : $g(x) > g(y)$ et f étant croissante : $f\big(g(x)\big) > f\big(g(y)\big)$: $f \circ g$ est décroissante

Exercice 3 : En décomposant la fonction $h(x) = |x - 3|$ en fonctions de référence, étudier ses variations.

$$h(x) = f \circ \, g(x)$$

avec $f(x) = |x|$ et $g(x) = x - 3$

Solution : g est une fonction affine strictement croissante.

La fonction f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0\,; +\infty[$

On va donc distinguer ces 2 cas :

f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ donc $f \circ \; g$ est décroissante pour x tel que $g(x) \leq 0$

Or $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$: h est donc décroissante sur $]-\infty; 3]$

On montre de même que h est croissante sur $[3\,;\; +\infty[$

Définition :

> Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction . La fonction f est dite :
> - paire si pour tout $x \in X$, on a $-x \in X$ et $f(-x) = f(x)$
> - impaire si pour tout $x \in X$, on a $-x \in X$ et $f(-x) = -f(x)$

Exemple : La fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 \end{array}$ est-elle paire ? Non car ici, si $n \in \mathbb{N}\,;\; -n \notin \mathbb{N}$

La fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 \end{array}$ est-elle paire ? Oui car si $n \in \mathbb{Z}\,;\; -n \notin \mathbb{Z}$ et clairement $f(n) = f(-n)$

Definition :

> f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel de I.
> - Dire que que f est **continue en a** signifie que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
> - Dire que que **f est continue sur l'intervalle I** signifie que **f est continue en tout réel a de I**.

Remarque : On a également comme définition équivalente :

f est continue en a si $\lim\limits_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$

Théorème des valeurs intermédiaires

> Soit f une fonction **continue sur un intervalle** $[a\,; b]$.
>
> Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe **au moins un** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

Exercice 4 : Si f est continue sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $[0\,,1]$ montrer que $f(x) = x$ a au moins une solution

Solution : On étudie la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$

g est donc continue comme différence de deux fonctions continues.

$g(0) = f(0) - 0 = f(0)$ et $g(1) = f(1) - 1$

- Si $f(1) = 1$ on a 1 comme solution et c'est fini.

Sinon comme f est à valeurs dans $[0,1]$ alors $f(1) < 1$ et donc $f(1) - 1 < 0$

- Soit $f(0) = 0$ et on a 0 comme solution alors c'est fini.
- Soit $f(0) \neq 0$ et comme f est à valeurs dans $[0,1]$ cela signifie que $f(0) > 0$
  Ainsi $g(0) = f(0)$ est positif et $g(1) = f(1) - 1$ est négatif. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ possède au moins une solution, notons α une de ces solutions et $g(\alpha) = 0$ équivaut à $f(\alpha) = \alpha$ on a trouvé au moins une solution

Exercice 5 :

1. On considère la fonction exponentielle, démontrer que cette fonction réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$
2. La réciproque de cette fonction est la fonction logarithme népérien notée ln. Démontrer que pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

Solution :

1. La fonction exponentielle est continue et croissante strictement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ donc d'après le théorème de la bijection, $\forall\, y \in \mathbb{R}^+$, $\exists!\, x \in \mathbb{R}$ tel que $y = e^x$. La fonction exponentielle est donc bien bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.
2. On sait que $e^{x+y} = e^x \times e^y$
   De plus, ln étant la réciproque d'exponentielle : $\forall x > 0; e^{\ln(x)} = x$
   Ainsi si a et b strictement positifs : $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b$
   Et $a \times b = e^{\ln(a \times b)}$
   En identifiant ces deux égalités, on obtient que $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a \times b)}$
   Et comme exponentielle est injective : $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$

Exercice 6 : Extrait du concours général de 2005 : Soit $f: [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle $[0; 1]$. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,; \frac{7}{10}]$: $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins sept solutions sur $[0; 1]$.
2. Donner une fonction f vérifiant les hyptohèses, on pourra se contenter d'une représentation graphique claire.

Solution : Considérons la fonction $g(x) = f\left(x + \frac{3}{10}\right) - f(x)$

1. g est continue sur l'intervalle $[0\,; \frac{7}{10}]$ et ne s'y annule jamais car $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$. La fonction g ne change donc jamais de signe car sinon d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait au moins une fois. Supposons par exemple que g soit strictement positive.

On a donc $\forall\, x \in \left[0; \frac{7}{10}\right]$: $f\left(x + \frac{3}{10}\right) > f(x)$

En particulier pour $x = 0$: $f\left(\frac{3}{10}\right) > f(0) = 0$: $f\left(\frac{3}{10}\right)$ est positif

Pour $x = \frac{3}{10}$: $f\left(\frac{6}{10}\right) > f\left(\frac{3}{10}\right)$ puis pour $x = \frac{6}{10}$: $f\left(\frac{9}{10}\right) > f\left(\frac{6}{10}\right)$

On a ainis : $f\left(\frac{9}{10}\right) > f\left(\frac{6}{10}\right) > f\left(\frac{3}{10}\right) > 0$

Pour $x = \frac{7}{10}$: $f(1) > f\left(\frac{7}{10}\right)$ et $f(1) = 0$ donc $f\left(\frac{7}{10}\right) < 0$

Pour $x = \frac{4}{10}$: $f\left(\frac{7}{10}\right) > f\left(\frac{4}{10}\right)$ $et\ pour\ x = \frac{1}{10}$: $f\left(\frac{4}{10}\right) > f\left(\frac{1}{10}\right)$

On a donc : $f\left(\frac{1}{10}\right) < f\left(\frac{4}{10}\right) < f\left(\frac{7}{10}\right) < 0$

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{10};\frac{3}{10}\right]$ f est continue et change de signe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins 1 fois sur cet intervalle.

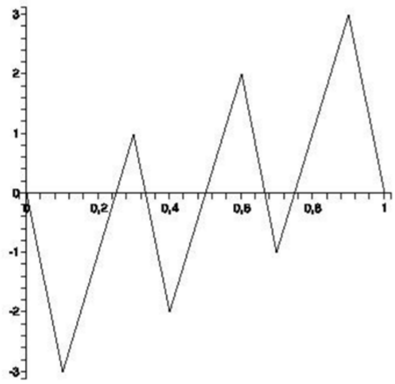
De même, sur les intervalles : $[\frac{3}{10};\frac{4}{10}]$; $[\frac{4}{10};\frac{6}{10}]$; $[\frac{6}{10};\frac{7}{10}]$ et $[\frac{7}{10};\frac{9}{10}]$

On a donc montré que f s'annule au moins 5 fois sur l'intervalle $[\frac{1}{10};\frac{9}{10}]$

Enfin, n'oublions pas que $f(0) = f(1) = 0$: f s'annule donc au moins 7 sept fois sur l'intervalle $[0; 1]$

2. Une fonction affine par morceaux et continue convient parfaitement

$f(0) = 0,\ f\left(\frac{1}{10}\right) = -3,\ f\left(\frac{3}{10}\right) = 1,\ f\left(\frac{4}{10}\right) = -2,$
$f\left(\frac{6}{10}\right) = 2,\ f\left(\frac{7}{10}\right) = -1,\ f\left(\frac{9}{10}\right) = 3,\ f(1) = 0$
qui vérifie $f\left(x + \frac{3}{10}\right) - f(x) = 1$
pour tout $x \in \left[0, \frac{7}{10}\right]$.



II. Equations fonctionnelles

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exercice 7 : Déterminer toutes les fonctions continues de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f \times f = f$. C'est-à-dire telles que pour tous réels x et y : $f(x) \times f(x) = f(x)$.

Solution : $\forall\ x \in\ \mathbb{R} : f(x)(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \forall\ x \in\ \mathbb{R} : f(x) = 0\ ou\ f(x) = 1$

f ne peut donc prendre que deux valeurs : 1 ou 0.

Supposons que : $\exists\ x\ \in \mathbb{R} : f(x) = 0$ et $\exists\ y\ \in \mathbb{R} : f(y) \neq 0$

Alors f n'est pas continue : contradiction. De même, si $\exists\ x\ \in \mathbb{R} : f(x) = 1$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$

Donc $\forall\ x \in\ \mathbb{R} : f(x) = 0$ ou $\forall\ x \in\ \mathbb{R} : f(x) = 1$

On donc trouvé que si une fonction vérifie l'équation fonctionnelle donnée alors c'est soit la fonction identiquement nulle soit la fonction constante égale à 1.

Cette partie, s'appelle l'analyse : si une fonction f vérifie l'équation fonctionnelle alors f est soit identiquement nulle soit constante égale à 1. Il ne faut pas oublier maintenant de vérifier que ces 2 solutions conviennent :

Réciproquement : si f est la fonction identiquement nulle, elle vérifie clairement $f \times f = f$

De même, si f est la fonction constante égale à 1, elle vérifie aussi clairement $f \times f = f$.

Conclusion : Les fonctions continues de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f \times f = f$ sont la fonction identiquement nulle et la fonction constante égale à 1.

Bilan : Résoudre des équations fonctionnelles.

Pour résoudre une équation fonctionnelle, on utilise souvent le raisonnement appelé Analyse/synthèse.

- Analyse : on essaie de collecter des informations sur la fonction : valeur particulière (peut-on trouver $f(0)$?) valeur en laquelle elle s'annule, … Puis on essaie de trouver la solution ou plutôt une famille de solutions.
- Synthèse : on vérifie ensuite que la solutions trouvées répondent bien au problème donné.

La partie Analyse n'est pas toujours évidente à mettre en place, car on ne dispose pas vraiment d'une méthode générale. En pratiquant, on va constater des procédés de raisonnement qui vont se répéter :

- On teste si des fonctions « évidentes » répondent au problème : fonction constante, identité ou fonction polynôme.
- Peut-on déterminer $f(0)$ ou $f(1)$? si non, on leur attribuera une valeur et on avance dans le procédé.
- Il peut être aussi intéressant d'étudier la parité de la fonction. Montrer qu'elle est paire ou impaire permet de ne l'étudier ensuite que sur $\mathbb{R}^+$
- Lorsque plusieurs paramètres interviennent, x et y, est-ce que fixer la valeur 0 à l'un deux permet de donner des renseignements intéressants sur la fonction ?

Exercice 8 : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) - f(y)$$

Solution :

1. On peut déjà constater que la fonction nulle convient.
2. En prenant $x = y = 0$ on trouve que $f(0) = f(0+0) = f(0) - f(0) = 0$
3. En prenant $x = 0$ on obtient que $\forall y \in \mathbb{R} : f(y) = -f(y)$ ce qui implique que $f(y) = 0$
   Analyse : Si f est une solution de l'équation fonctionnelle alors f est identiquement nulle.
   Synthèse : Etant donné que la fonction nulle vérifie bien l'équation fonctionnelle, on en déduit que la seule solution possible est la fonction nulle.

Exercice 9 : Déterminer toutes les fonctions strictement croissante sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f \circ f = id$. Où id désigne la fonction identité : $id : x \mapsto x$.

Solution :

Analyse : La fonction $f(x) = x$ convient parfaitement, difficile d'en trouver d'autre : on va montrer que c'est la seule solution en raisonnant par l'absurde.

Supposons qu'il existe une fonction f strictement croissante vérifiant $f(f(x)) = x$ pour tout réel x qui ne soit pas la fonction identité, c'est-à-dire qu'il existe un réel a tel que $f(a) \neq a$.

- Soit $f(a) < a$ et comme f est strictement croissante : $f\big(f(a)\big) < f(a)$. Or $f(f(a) = a$ et donc $a < f(a)$: $absurde$.
- Soit $f(a) > a$ et comme f est strictement croissante : $f\big(f(a)\big) > f(a)$. Or $f(f(a) = a$ et donc $a > f(a)$: $absurde$.

On obtient donc une contradiction, ce qui signifie que $f(a) = a$ pour tout réel a et donc f est la fonction identité.

Synthèse : La fonction identité vérifie clairement l'équation fonctionnelle.

Conclusion : La seule solution possible est la fonction identité.

<u>Exercice 10 :</u> Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 et vérifiant pour tous réels x et y : $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Donner des solutions particulières de cette équation fonctionnelle.
2. Si f est solution de cette équation fonctionnelle. Déterminer $f(0)$.
3. Démontrer qu'une fonction f vérifiant l'équation fonctionnelle est impaire.
4. Si f est solution de cette équation fonctionnelle montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (Indication : Montrer que f est continue en a revient à montrer que $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = \ ...$)
5. Si n est un entier naturel, démontrer par récurrence une formule donnant $f(n)$ en fonction de $f(1)$
6. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si n est un entier relatif
7. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si r est un rationnel.
8. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si x est un réel.
   On admettra la propriété suivante : « **Pour tout réel x, il existe une suite (x_n) de rationnels (des développements décimaux par exemple) qui converge vers x** »
9. Conclure

Solution :

1. Donner des solutions particulières de cette équation fonctionnelle.
   Essayons avec les fonctions constantes : Si $f(x) = k$ est une fonction constante avec k réel alors $f(x+y) = k$. Si de plus $f$est solution de l'équation fonctionnelle alors $f(x+y) = f(x) + f(y) = 2k$. On obtient que $k = 2k$ ce qui implique $k = 0$. Parmi les fonctions constantes, seule la fonction identiquement nulle convient.
   La fonction identité convient car $id(x+y) = x + y = id(x) + id(y)$
   Les fonctions affines $f(x) = ax + b$
   $$f(x+y) = a(x+y) + b = ax + ay + b$$
   Or $f(x) + f(y) = ax + b + ay + b = ax + ay + 2b$
   Si f vérifie l'équation fonctionnelle, on obtient que $b = 2b$ c'est-à-dire $b = 0$
   Les seules fonctionnes affines qui conviennent sont les fonctions linéaires $f(x) = ax$
2. Si f est solution de cette équation fonctionnelle. Déterminer $f(0)$.
   $Avec\ x = 0\ et\ \ y = 0$ on obtient que $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ c'est-à-dire $f(0) = 0$
3. Démontrer qu'une fonction f vérifiant l'équation fonctionnelle est impaire.
   $\forall x \in \mathbb{R}$, l'équation fonctionnelle avec $y = -x$ nous :
   $$f(x-x) = f(x) + f(-x)$$
   $$Or\ f(x-x) = f(0) = 0$$
   D'où : $f(x) + f(-x) = 0$ c'est-à-dire : $f(-x) = -f(x)$: f est impaire.
4. Si f est solution de cette équation fonctionnelle montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
   Soit a un réel non nul : Montrer que f est continue en a revient à montrer que :

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$$

Or $f(a+h) = f(a) + f(h)$

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} f(a) + \lim_{h \to 0} f(h)$$

$$\lim_{h \to 0} f(a) = f(a)$$

Et par continuité de f en 0 : $\lim_{h \to 0} f(h) = f(0) = 0$

D'où : $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$: f est continue en a.

Ceci étant vrai pour tout réel a, f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

5. Si n est un entier naturel, démontrer par récurrence une formule donnant $f(n)$ en fonction de $f(1)$

   Regardons quelques exemples :

   $n = 2 : f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$

   $n = 3 : f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3f(1)$ etc ….

   Posons, pour tout entier naturel n $P(n)$ la propriété : « $f(n) = nf(1)$ »

   Démontrons $P(n)$ par récurrence sur n

   Initialisation : $n = 0 : f(0) = 0 = 0f(1) : P(0)$ est vréifiée.

   Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $P(n+1)$ est vraie également.

   Par hypothèse de récurrence : $f(n) = nf(1)$

   $$f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$$

   $$P(n+1) est\ vérifiée.$$

   Conclusion : $P(n)$ est vraie au rang n et est héréditaire. Par axiome de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

6. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si n est un entier relatif

   D'après la question précédente, il faut la relation si $n \in \mathbb{Z}$ et $n < 0$.

   Dans ce cas, $-n \in \mathbb{N}$ et $f(-n) = -nf(1)$ d'après la question précédente.

   Or f étant impaire : $f(n) = -f(-n) = nf(1)$: l'égalité est encore vérifiée.

   (Remarque : On peut aussi utiliser la relation $f(n-n) = f(n) + f(-n)$)

7. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si r est un rationnel.

   Si $r \in \mathbb{Q}$ alors $r = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers relatifs, et q non nul.

   Ainsi $f(q \times r) = f(p) = pf(1)$ car p est un entier relatif et on utilise la question précédente.

   Or d'après l'équation fonctionnelle $f(q \times r) = q(f(r))$

   On obtient donc $qf(r) = pf(1)$

   $$f(r) = \frac{p}{q} f(1) = rf(1)$$

   L'égalité est encore vérifiée pour les rationnels.

8. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si x est un réel.

   On utilise la propriété donnée : Il existe une suite de rationnels (x_n) qui converge vers x.

   $$f(x) = f(\lim_{n \to +\infty} x_n)$$

   Et f étant continue : $f\left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_n f(1) = xf(1)$

   Ainsi pour tout réel x, on obtient $f(x) = xf(1)$

9. Conclure :

   Analyse : D'après les question précédentes, on a montré que si une fonction f est solution de l'équation fonctionnelle, alors $f(x) = xf(1)$ et en posant $f(1) = a$, on obtient que $f(x) = ax$ c'est-à-dire que f est linéaire.

   Synthèse : Nous avons déjà vérifié que les fonctions linéaires sont bien solution de l'équation fonctionnelle.

   Conclusion : Les solutions de l'équation fonctionnelle sont les fonctions linéaires.

Exercice 11 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et en 1 telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$$

Montrer que f est constante.

Indication : commencer par étduier la parité de f.

Pour tout $x > 0$, remarquer $(x^{\frac{1}{2^n}})$ converge vers 1 et utiliser la continuité de f en 1.

Solution : On peu déjà remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)$$

La fonction f est paire. Il suffit donc de montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^+$

Soit $x > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$ et qe f est continue en 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(1)$$

Or $f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f((x^{\frac{1}{2^n}})^2) = f(x^{\frac{1}{2^{n-1}}}) = f(x^{\frac{1}{2^{n-2}}}) = \cdots = f(x)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(x)$

Par unicité de la limite, il vient $f(x) = f(1)$

f est donc constante et égale à $f(1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis par parité, f est constante sur $\mathbb{R}^*$

Reste à déterminer $f(0)$

Comme f est supposée continue en 0 : $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

f étant constante sur $\mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(1)$.

On a donc : $f(0) = f(1)$: f est constante sur $\mathbb{R}$.

Synthèse : Les fonctions constantes vérifient clairement l'équation fonctionnelle.

Conclusion : Les seules solutions de cette équation fonctionnelle sont les fonctions constantes.

Exercice 12 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

a) On suppose que $f(0) = 0$. Vérifier que
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$
Donner alors la forme de la fonction f

b) On revient au cas général. Déterminer f.

Solution :

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} : f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(0)\big) = \frac{1}{2} f(x)$

Ceci étant vrai pour tout réel x, on a notamment que :
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2} f(x+y)$$
Or d'après l'équation fonctionnelle vérifiée par f

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2}f(x+y) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)$$

Et donc $f(x+y) = f(x) + f(y)$

On retrouve l'équation fonctionnelle de Cauchy (exercice 10) et on en déduit que $f(x) = ax$ avec a réel

b) Revnons au cas général : considérons la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(0)$

On a $g(0) = 0$ et $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0)$$
$$= \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big) - f(0)$$

En remarquant que $f(0) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0)$ il vient que :

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(0)\big) + \frac{1}{2}\big(f(y) - f(0)\big)$$
$$= \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(y)$$
$$= \frac{1}{2}\big(g(x) + g(y)\big)$$

Ainsi, g vérifie l'équation fonctionnelle et $g(0) = 0$

D'après la question a) : $g(x) = ax$ avec a réel.

Par suite $f(x) = g(x) + f(0) = ax + f(0) = ax + b$ en posant $b = f(0)$

f est donc une fonction affine.

Synthèse : les fonctions affines vérifient bien l'équation fonctionnelle.

Les solutions de cette équation fonctionnelle sont donc les fonctions affines.

<u>Exercice 13 :</u> Déterminer toutes les fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Analyse : Soit f une solution de l'équation fonctionnelle.

En prenant $x = y = 0$, on obtient que $f(0)^2 - f(0) = 0$ soit $f(0)^2 = f(0)$

Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$

Si $f(0) = 0$: reprenons l'équation fonctionnelle pour tout réel $x \neq 0$ et fixons $y = 0$.

Il vient : $f(x)f(0) - f(0) = x$ c'est-à-dire : $x = 0$: on obtient une contradiction.

Le cas $f(0) = 0$ est donc impossible.On a donc $f(0) = 1$

Reprenons l'équation fonctionnelle pour tout réel $x \neq 0$ et fixons $y = 0$

On obtient cette fois : $f(x)f(0) - f(0) = x$

$$f(x) - 1 = x$$

$$f(x) = x + 1$$

Donc si f est solution, la seule fonction possible est : $f(x) = x + 1$

Synthèse : on vérifie que $f(x) = x + 1$ est bien solution de l'équation fonctionnelle.

Conclusion : L'unique solution est $f(x) = x + 1$