I. Généralités sur les fonctions

Une fonction f décrit une relation entre un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée, que l'on note ainsi :

$$f:\ I \longrightarrow J$$
$$x \mapsto f(x)$$

Dans la plupart des exemples rencontrés au lycée, on dispose de formules arithmétiques simples permettant de calculer l'image d'un nombre. Par exemple :

$$f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 3x^2 + 4x - 1$$

Il peut aussi arriver que l'on ne dispose pas de formule simple pour décrire l'image d'un réel par une fonction. On se contentera alors de noter cette image $f(x)$.

La notion clé à retenir pour une fonction est l'unicité de l'image : A tout nombre de l'ensemble de départ I, on associe un unique nombre de l'ensemble d'arrivée J

En revanche, un nombre peut avoir plusieurs antécédents : un élément de l'ensemble d'arrivée J peut être l'image de plusieurs éléments de l'ensemble de départ I. Prenons l'exemple de la fonction $f(x) = x^2$.On sait que 4 est l'image de 2 et de -2.

De plus, il n'est pas non plus nécessaire que chaque élément de l'ensemble d'arrivée J soit l'image d'un élément de l'ensemble de départ. Si on reprend notre exemple de référence avec la fonction carré, on peut la décrire comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Tous les réels ont bien une unique image par cette fonction. En revanche, les réels négatifs, ne sont l'image d'aucun réel par cette fonction.

Définition : La fonction identité notée id est la fonction définie par : $id:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x$$

Définition : Une fonction $f: X \longrightarrow Y$ est dite injective si tout réel $y \in Y$ admet au plus un antécédent dans X. Dans la pratique cela signifie que si $f(a) = f(b)$ alors $a = b$.

Exemples : La fonction $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle injective ?

La fonction $f:\ \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est-elle injective ?

Définition : Une fonction $f: X \longrightarrow Y$ est dite surjective si tout réel $y \in Y$ admet au moins un antécédent dans X.

Exemples : La fonction $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle surjective ?

La fonction $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle surjective ?

La fonction $f:\ \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est-elle surjective ?

Définition :

> Une fonction $f\colon X \longrightarrow Y$ est dite bijective si elle est surjective et injective. C'est-à-dire que pour tout réel $y \in Y$, il existe un unique $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Tout réel de l'ensemble Y admet un unique antécédent dans X.

Exemples : La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$ est-elle bijective ?

Définition :

> On considère une fonction $f : X \longrightarrow Y$ bijective. On définit alors la fonction réciproque de f notée f^{-1} avec $f^{-1}\colon Y \to X$ qui a tout réel $y \in Y$ associe l'unique élément $x \in X$ vérifiant $y = f(x)$ (x est l'unique antécédent de y par f). On a donc $f^{-1}(y) = x$.

Exemple : Si on considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$. Expliquez pourquoi cette fonction admet une réciproque et expliciter f^{-1}.

Définition :

> Soit $f : X \to Y$ une fonction et I une partie de X.
>
> La fonction f est dite croissante (respectivement strictement croissante) si pour tous réels a et b de I, si $a \leq b$ (resp. $a < b$) alors $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) < f(b)$).
>
> La fonction f est dite décroissante (respectivement strictement décroissante) si pour tous réels a et b de I, si $a \geq b$ (resp. $a > b$) alors $f(a) \geq f(b)$ (resp. $f(a) > f(b)$).
>
> La fonction f est dite monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.
>
> On définit de la même manière la stricte monotonie sur I.

En résumé, une fonction croissante conserve l'ordre et une fonction décroissante inverse l'ordre.

Exercice 1 : Soit $f : X \to \mathbb{R}$ strictement monotone sur X. Prouver que f est injective sur X.

Exercice 2 : Prouver que si $f : X \to Y$ est une bijection strictement croissante. Alors $f^{-1}\colon Y \to X$ est également strictement croissante.

Notation :

> Soit $f : X \to Y$ et $g : I \to J$ deux fonctions vérifiant pour tout $x \in I : g(x) \in X$.
>
> La fonction composée de g par f est notée $f \circ g$ se lit « $f\ rond\ g$ » est définie pour tout $x \in I$ par :
>
> $$(f \circ g)(x) = f((g(x))$$
>
> Il s'agit de la composée de g suivie de f : il faut d'abord calculer $g(x)$ puis l'image de $g(x)$ par la fonction f.

Exemple : On considère $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = 3x + 1$. Après avoir donner l'ensemble de définition de $f \circ g$ expliciter $f \circ g(x)$. Même question avec $g \circ f$

Exemple : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. Déterminer $f^{-1} \circ f$ puis $f \circ f^{-1}$

Théorème :

> Soit $f : X \to Y$ et $g : I \to J$ deux fonctions vérifiant pour tout $x \in I : g(x) \in X$.
>
> - Si f et g sont croissantes alors $f \circ g$ est croissante.
> - Si f et g sont décroissantes alors $f \circ g$ est croissante.
> - Si f est décroissante et g croissante alors $f \circ g$ est décroissante
> - Si f est croissante et g décroissante alors $f \circ g$ est décroissante

Exercice 3 : En décomposant la fonction $h(x) = |x-3|$ en fonctions de référence, étudier ses variations.

Définition :

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction . La fonction f est dite :
- paire si pour tout $x \in X$, on a $-x \in X$ et $f(-x) = f(x)$
- impaire si pour tout $x \in X$, on a $-x \in X$ et $f(-x) = -f(x)$

Exemple : La fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 \end{array}$ est-elle paire ?

La fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 \end{array}$ est-elle paire ?

Definition :

f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel de I.
- Dire que f est **continue en a** signifie que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- Dire que **f est continue sur l'intervalle I** signifie que **f est continue en tout réel a de I**.

Remarque : On a également comme définition équivalente : f est continue en a si $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue sur un intervalle** $[a\,;b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe **au moins un** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

Exercice 4 : Si f est continue sur $[0\,;1]$ à valeurs dans $[0\,,1]$ montrer que $f(x) = x$ a au moins une solution

Exercice 5 :

1. On considère la fonction exponentielle, démontrer que cette fonction réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$
2. La réciproque de cette fonction est la fonction logarithme népérien notée ln.
   a) Déterminer $\ln(1)$.
   b) Démontrer que pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
   c) En déduire une formule pour $\ln\left(\frac{1}{b}\right)$ puis $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

Exercice 6 : Extrait du concours général de 2005 : Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle $[0; 1]$. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\frac{7}{10}]$: $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a au moins sept solutions sur $[0; 1]$.
2. Donner une fonction f vérifiant les hyptohèses, on pourra se contenter d'une représentation graphique claire.

II. Equations fonctionnelles

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exercice 7 : Déterminer toutes les fonctions continues de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f \times f = f$. C'est-à-dire telles que pour tous réels x et y : $f(x) \times f(x) = f(x)$.

Bilan : Résoudre des équations fonctionnelles.

Pour résoudre une équation fonctionnelle, on utilise souvent le raisonnement appelé Analyse/synthèse.

- Analyse : on essaie de collecter des informations sur la fonction : valeur particulière (peut-on trouver $f(0)$?) valeur en laquelle elle s'annule, … Puis on essaie de trouver la solution ou plutôt une famille de solutions.
- Synthèse : on vérifie ensuite que la (ou les) solution(s) trouvée(s) réponde(nt) bien au problème donné.

La partie Analyse n'est pas toujours évidente à mettre en place, car on ne dispose pas vraiment d'une méthode générale. En pratiquant, on va constater des procédés de raisonnement qui vont se répéter :

- On teste si des fonctions « évidentes » répondent au problème : fonction constante, identité ou fonction polynôme.
- Peut-on déterminer $f(0)$ ou $f(1)$? si non, on leur attribuera une valeur et on avance dans le procédé.
- Il peut être aussi intéressant d'étudier la parité de la fonction. Montrer qu'elle est paire ou impaire permet de ne l'étudier ensuite que sur $\mathbb{R}^+$
- Lorsque plusieurs paramètres interviennent, x et y, est-ce que fixer la valeur 0 à l'un deux permet de donner des renseignements intéressants sur la fonction ?

Exercice 8 : Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) - f(y)$$

Exercice 9 : Déterminer toutes les fonctions strictement croissante sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f \circ f = id$. Où id désigne la fonction identité : $id : x \mapsto x$.

Exercice 10 : Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 et vérifiant pour tous réels x et y : $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Donner des solutions particulières de cette équation fonctionnelle.
2. Si f est solution de cette équation fonctionnelle. Déterminer $f(0)$.
3. Démontrer qu'une fonction f vérifiant l'équation fonctionnelle est impaire.
4. Si f est solution de cette équation fonctionnelle montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (Indication : Montrer que f est continue en a revient à montrer que $\lim_{h \to 0} f(a+h) = \ldots$)
5. Si n est un entier naturel, démontrer par récurrence une formule donnant $f(n)$ en fonction de $f(1)$
6. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si n est un entier relatif
7. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si r est un rationnel.
8. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si x est un réel.
   On admettra la propriété suivante : « **Pour tout réel x, il existe une suite (x_n) de rationnels (des développements décimaux par exemple) qui converge vers x** »
9. Conclure

Exercice 11 : Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et en 1 telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$$

Montrer que f est constante.

Indications :

- Commencer par étudier la parité de f.
- Pour tout $x > 0$, remarquer $(x^{\frac{1}{2^n}})$ converge vers 1 et utiliser la continuité de f en 1.

Exercice 12 : Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

a) On suppose que $f(0) = 0$. Vérifier que
$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$
Donner alors la forme de la fonction f

b) On revient au cas général. Déterminer f.

Exercice 13 : Déterminer toutes les fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

III. Dérivation et équation fonctionnelle

Définition

Une fonction est dérivable en a si son taux d'accroissement en a, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, admet une limite finie quand x tend vers a. On définit alors $f'(a)$ par : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Exercice 14 : Démontrer qu'une fonction dérivable en a est continue en a.

Que penser de la réciproque ?

Exercice 15 : La fonction $f(x) = \sqrt{3x-4}$ est-elle dérivable en $\frac{4}{3}$?

Exercice 16 : Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x}$; $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3-5x-4}{x+1}$

Théorème :

Soit $v: I \to J$ une fonction définie et dérivable sur I et $v : K \to \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur K avec $J \subset K$

La fonction $u \circ v$ est dérivable sur I et : $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$. C'est-à-dire :

$$\forall x \in I, (u \circ v)'(x) = v'(x)u'\big(v(x)\big)$$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction : $f(x) = (4x^2 + 3)^{10}$

Exercice 17 : Démontrer que $\forall x > 0, ln'(x) = \frac{1}{x}$

Exercice 18 : Soient a, b et x trois réels strictement positifs avec $a < b$.

Démontrer l'inégalité : $0 < be^{-ax} - ae^{-bx} < b - a$

Exercice 19 : Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $\ln(x) = kx^2$ où k est un réel.

Indications : On donne le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ (Croissances comparées)

Exercice 20 : On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Déterminer la dérivée de la fonction :

$$g : x \mapsto f(xy)$$

Exercice 21 : Revenons sur l'équation fonctionnelle de Cauchy : Déterminer les solutions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables et vérifiant $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Exercice 22 : On chercher les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'équation fonctionnelle :

$$f(x + y) = f(x) \times f(y), pour\ tous\ x, y \in \mathbb{R}$$

1. Chercher des solutions particulières :
   a) Déterminer quelles sont les fonctions constantes solutions de cette équation fonctionnelle.
   b) Montrer que les fonctions de la forme $f(x) = e^{ax}$, où a est un réel, sont solutions de cette équation fonctionnelle.
2. On suppose que f est une solution de cette équation fonctionnelle et que f n'est pas identiquement nulle.
   a) Déterminer $f(0)$
   b) Montrer que $f(x) \geq 0$ (Indications : pensez que $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \ldots$)
   c) En déduire que $f(x) > 0$
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$
4. Justifier que la fonction $g(x) = \ln(f(x))$ est bien définie et montrer que g vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy. En déduire l'expression de f
5. Conclure

Exercice 23 : extrait du concours général de 2009

Le but de l'exercice est la recherche des fonctions f définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$, vérifiant pour tout réel x la relation $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, telles que $f(0) = 1$ et que $\frac{1 - f(x)}{x^2}$ admette une limite lorsque x tend vers 0, que l'on notera a.

On rappelle que tout x de $[-1, 1]$ s'écrit de façon unique $x = \cos(\theta)$ avec θ dans $[0, \pi]$.

1. (a) Vérifier $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$. (On pourra utiliser une formule donnant $\cos(2\alpha)$).

   (b) Montrer, pour θ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les relations : $\frac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin(\theta)$ et $\cos(\theta) \leqslant 1 - \frac{\theta^2}{\pi}$.
2. Soit f une fonction solution du problème On se donne un réel x et l'on pose, pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n)$, avec θ_n dans $[0, \pi]$.

   (a) Montrer que f est continue en 0 et que $\lim\limits_{n \to \infty} \theta_n = 0$.

__Indications :__

1)a) : $\cos(2\alpha) = 1 - sin^2(\alpha)$. On pourra utiliser que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

2a) Commencer par déterminer $\lim_{n \to +\infty} \cos(\theta_n)$ et en déduire un intervalle auquel appartient alors θ_n

__Exercice 24 : Extrait du concours général de 2008__

On munit le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit S la courbe d'équation

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}.$$

1. Quelle est la nature géométrique de S ?
2. Pour tout couple (u, v) de nombre réels on note U le point de coordonnées (u, v), et pour x dans $\mathbf{R}$ on note $M(x)$ le point de S d'abscisse x. On pose

$$f_U(x) = UM(x), \qquad g_U(x) = [f_U(x)]^2.$$

   (a) Calculer g_U, g'_U, et g''_U. Résoudre l'équation $g''_U(x) = 0$.

   (b) Donner le tableau des variations de f_U (on ne cherchera pas à calculer explicitement le ou les nombres réels où f_U admet un extremum relatif).

3. On dira qu'un cercle C de centre U et de rayon UM est tangent en M à S si M est un point de S et si les tangentes en M à C et S coincident.

   Soit U un point du plan n'appartenant pas à S, et soit a dans $\mathbf{R}$. Montrer que le cercle de centre U et de rayon $UM(a)$ est tangent en $M(a)$ à S si et seulement si $g'_U(a) = 0$.

4. (a) Montrer que tout point n'appartenant pas à S est centre d'au moins un et d'au plus 3 cercles tangents à S.

   (b) Pour U n'appartenant pas à S, on note $n(U)$ le nombre de réels x pour lesquels le cercle de centre U et de rayon $UM(x)$ est tangent en $M(x)$ à S. Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, caractériser par une égalité ou une inégalité simple l'ensemble des points U n'appartenant pas à S tels que $n(U) = i$. On pourra être amené à discuter selon le signe de $81u^2 - 16v^3$.

   Faire un croquis représentant S et les ensembles trouvés.

Indications :

2 b) : Penser que $f(x) = \sqrt{g(x)}$ et en déduire que les variations de f dépendent de celles de g.

Etudier les variations de g' grâce au signe de g'' en distinguant les cas selon lesquels $g''(x) = 0$ a deux solutions, une seule ou aucune.

A partir de variations de g', déterminer son signe.

Dans le cas où il y a deux solutions, il faudra déterminer les signes de $g'(-\sqrt{v})$ et $g'(\sqrt{v})$. Pour savoir s'ils ont le même signe, calculer $g'(-\sqrt{v}) \times g'(\sqrt{v})$ et distinguer les différents cas possibles.(Il y aura 4 cas à envisager : de même signe, l'un d'eux est nul ou de signes contraires)

Une fois le signe de g' obtenu, en déduire les variations de g puis de f dans chaque cas considéré.

3) Déterminer le coefficient directeur de la tangente en $M(a)$ à S et en déduire un vecteur directeur. Déterminer un vecteur normal de la tangente à C en $M(a)$. Traduire l'orthogonalité des 2 vecteurs à l'aide du produit scalaire.

4) Quelle est la nature de g' ? Combien de racines peut-elle avoir au maximum ?