

Exercice 25 : On veut déterminer les fonctions f dérivables en 0 vérifiant : $f(2x) = 2f(x)$

1. Soit f une solution. Déterminer $f(0)$
2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ où f est une solution du problème.
 - a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
 - b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(x)$
 - c) En déduire $g(x)$ puis une expression de $f(x)$
3. Conclure.

III. Equation différentielle et intégration

On appelle équation différentielle une égalité dont l'inconnue est une fonction avec ses dérivées successives et éventuellement une autre fonction.

Notation : On écrit généralement y à la place de $f(x)$ et y' à la place de $f'(x)$ dans les équations différentielles.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $y' = f$ sur I . Résoudre cette équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions g dérivable sur I vérifiant : pour tout $x \in I$: $g'(x) = f(x)$

Exemple : Trouver une solution de l'équation différentielle $y' = k$ avec k réel ? Peut-on en trouver d'autres ?

Même questions avec les équations différentielles :

$$y' = 2x \quad ; \quad y' = 3x^2 \quad ; \quad y' = y$$

De manière plus générale, on appelle équation différentielle du 1^{er} ordre une équation dans laquelle interviennent une fonction dérivable f , sa dérivée f' et une variable.

Nous allons étudier deux types d'équation différentielle :

- $y' = ay + b$ avec a et b réels, a non nul
- $y' = u$ où u est une fonction

Exercice 26 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y' = ay$
 - a) Montrer que les fonction $f(x) = Ce^{ax}$ où C est une constante, sont solutions.
 - b) Montrer que ce sont les seules solutions possibles.
2. On cherche maintenant à résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont des constantes.
 - a) Parmi les fonctions constantes, déterminer une solution particulière. On note f cette solution particulière.
 - b) Soit g une solution non constante de l'équation différentielle. En considérant la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$ déterminer l'expression de g
 - c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Une primitive de f sur I est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.
Autrement F est une primitive de f sur I si, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = f(x)$

La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation

Propriété :

- Toutes fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur I
- Deux primitives d'une même fonction différent d'une constante.

Exemple 27 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

$$y' = x^3 + 1 \quad y' = \frac{1}{x} \quad y' = \frac{1}{x \ln(x)} \quad y' = a^x$$

Exercice 28 : On reprend l'équation fonctionnelle de l'exercice 22 : On cherche les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'équation fonctionnelle :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y), \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}$$

En dérivant cette équation fonctionnelle par rapport à x , retrouver la forme des fonctions solutions de ce problème.

Exercice 29 : Déterminer les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

1. Déterminer $f(1)$
2. Exprimer, pour tout $x > 0$, $f'(x)$ en fonction de $f'(1)$
3. Conclure

Exercice 30 : On souhaite déterminer toutes les fonctions définies et dérivables sur $I =]-1; 1[$, autres que la fonction nulle, et telles que pour tout x et pour tout y dans I :

$$f(x)f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

Soit φ une fonction vérifiant ces conditions.

1. Déterminer $\varphi(0)$
2. Montrer que φ ne s'annule pas sur I et que pour tout x de I : $\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}$
3. Soit x un élément de I . Soit h un élément de I tel que $x+h \in I$
 - a) Montrer qu'il existe y appartenant à I tel que $x+h = \frac{x+y}{1+xy}$
 - b) En déduire que $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi'(0)}{1-x^2}$. Indications : $\varphi'(x)$ correspond à la limite d'un taux d'accroissement.
 - c) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$
 - d) En déduire l'expression de $\varphi(x)$
4. Répondre au problème posé.

La recherche de primitives n'est pas toujours évidente à mettre en œuvre. Il est parfois nécessaire de « travailler » l'expression de f' pour la mener à bien. Dans l'exercice précédent par exemple, la question 3c) utilise une technique dite de décomposition en éléments simples pour réussir à déterminer l'expression de la primitive recherchée.

D'autres méthodes existent, tel que le calcul intégral.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit F est une primitive quelconque de f sur I et a et b deux réel de l'intervalle I . On appelle intégrale de a à b de f le réel défini par :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque : Le calcul de l'intégral par cette méthode est indépendant de la primitive choisie.

Définition :

Exemples : Calculer :

1. $\int_{-1}^2 x^3 dx$

2. $\int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$

3. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx$

Il y a différentes propriétés que l'on peut démontrer sur les intégrales. Ici nous allons nous intéresser à l'intégration par parties :

Formule d'intégration par parties :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' sont continues sur I , alors pour tous réels a et b appartenant à I :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Exercice 32 : On considère la fonction G définie sur $]0 ; +\infty[$ par $G(x) = \int_e^x \ln(t) dt$

1. Que représente la fonction G pour la fonction logarithme népérien ?
2. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer G

Exercice 33 : En utilisant la même méthode qu'à l'exercice précédent, déterminer la primitive qui s'annule en 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^x$

Exercice 34 : Déterminer la primitive qui s'annule en 1 de la fonction définie sur $] -1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

Exercice 35 : Extrait du concours général

On appelle fonction de type T_0 les fonctions « trinômes » sur $[-1 ; 1]$ définies par :

$$t(x) = ax^2 + bx + c$$

a, b et c étant des réels quelconques.

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle fonction de type T_n les fonctions de la forme $f + \lambda |g|$, λ étant un réel quelconque et f et g étant des fonctions quelconques de type T_{n-1} .

1. Etablir que la fonction ϕ définie par $\phi(x) = 0$ pour tout x de $[-1 ; 0]$ et $\phi(x) = x$ pour tout x de $[0 ; 1]$ est de type T_1 .
2. Soit P un trinôme défini sur $[-1 ; 1]$ tel que $P(0) = 0$.
 - a. Montrer qu'il existe un réel k positif ou nul tel que pour tout x de $[-1 ; 1]$,
$$|P(x)| \leq k |x|.$$
 - b. Que vaut $\psi(x) = |P(x) + kx| - |kx|$ suivant le signe de x ?
3. On considère deux trinômes t_1 et t_2 tels que $t_1(0) = t_2(0)$ et on définit la fonction f sur $[-1 ; 1]$ telle que :
Pour tout réel x de $[-1 ; 0]$, $f(x) = t_1(x)$ et pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $f(x) = t_2(x)$.
Démontrer qu'il existe un entier N tel que f soit de type T_N .

Exercice 36 : Extrait du concours général (2019)

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$.

Pour f et g dans $\mathcal{P}$, on définit la fonction $h = f \circ g$ en posant, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$h(x) = f(g(x)).$$

Si, pour tout nombre réel $x \geq 0$, on a $f(x) \geq g(x)$, on note $f \geq g$.

On note u et v les fonctions de $\mathcal{P}$ définies, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par

$$u(x) = e^x - 1 \text{ et } v(x) = \ln(x+1).$$

La fonction f est une *fonction polynomiale* si f est nulle ou s'il existe un entier $d \geq 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_d$ avec $a_d \neq 0$ tels que, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Les nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_d$ sont alors appelés coefficients de la fonction polynomiale f .

Si $\mathcal{S}$ est un ensemble de fonctions de $\mathcal{P}$, on définit les propriétés :

- (P1) $\mathcal{S}$ contient u et v .
- (P2) $\mathcal{S}$ contient toutes les fonctions constantes positives.
- (P3) Si f et g sont dans $\mathcal{S}$, alors $f + g$ est dans $\mathcal{S}$.
- (P4) Si f et g sont dans $\mathcal{S}$, alors $f \circ g$ est dans $\mathcal{S}$.
- (P5) Si f et g sont dans $\mathcal{S}$ avec $f \geq g$, alors $f - g$ est dans $\mathcal{S}$.
- (P6) Si f et g sont dans $\mathcal{S}$, alors $f \times g$ est dans $\mathcal{S}$.

- 1) Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de fonctions de $\mathcal{P}$ qui vérifie les propriétés (P1), (P2), (P3), (P4), (P5) et (P6).
 - a) Soit ℓ la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par $\ell(x) = x$. Démontrer que la fonction ℓ est dans $\mathcal{T}$.
 - b) Déterminer toutes les fonctions affines qui sont dans $\mathcal{T}$.
 - c) Soit p la fonction polynomiale définie, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Démontrer que la fonction p est dans $\mathcal{T}$.
 - d) Une fonction polynomiale de $\mathcal{P}$ est-elle toujours dans $\mathcal{T}$?