Exercice 25 : On veut déterminer les fonctions f dérivables en 0 vérifiant : $f(2x) = 2f(x)$

1. Soit f une solution. Déterminer $f(0)$
2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ où f est une solution du problème.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(x)$

c) En déduire $g(x)$ puis une expression de $f(x)$

3. Conclure.

III. Equation différentielle et intégration

On appelle équation différentielle une égalité dont l'inconnue est une fonction avec ses dérivées successives et éventuellement une autre fonction.

Notation : On écrit généralement y à la place de $f(x)$ et y' à la place de $f'(x)$ dans les équations différentielles.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $y' = f$ sur I.

Résoudre cette équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions g dérivable sur I vérifiant : pour tout $x \in I$: $g'(x) = f(x)$

Exemple : Trouver une solution de l'équation différentielle $y' = k$ avec k réel ? Peut-on en trouver d'autres ?

Même questions avec les équations différentielles :

$$y' = 2x \quad ; \quad y' = 3x^2 \quad ; \quad y' = y$$

De manière plus générale, on appelle équation différentielle du 1er ordre une équation dans laquelle interviennent une fonction dérivable f, sa dérivée f' et une variable.

Nous allons étudier deux types d'équation différentielle :

- $y' = ay + b$ avec a et b réels, a non nul
- $y' = u$ où u est une fonction

Exercice 26 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y' = ay$
   a) Montrer que les fonction $f(x) = Ce^{ax}$ où C est une constante, sont solutions.
   b) Montrer que ce sont les seules solutions possibles.
2. On cherche maintenant à résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont des constantes.
   a) Parmi les fonctions constantes, déterminer une solution particulière. On note f cette solution particulière.
   b) Soit g une solution non constante de l'équation différentielle. En considérant la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$ déterminer l'expression de g
   c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Une primitive de f sur I est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Autrement F est une primitive de f sur I si, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = f(x)$

La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation

Propriété :

- Toutes fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur I
- Deux primitives d'une même fonction différent d'une constante.

Exemple 27 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

$y' = x^3 + 1 \qquad y' = \frac{1}{x} \qquad y' = \frac{1}{xln(x)} \qquad y' = a^x$

Exercice 28 : On reprend l'équation fonctionnelle de l'exercice 22 : On chercher les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'équation fonctionnelle :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y), pour\ tous\ x, y \in \mathbb{R}$$

En dérivant cette équation fonctionnelle par rapport à x, retrouver la forme des fonctions solutions de ce problème.

Exercice 29 : Déterminer les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

1. Déterminer $f(1)$
2. Exprimer, pour tout $x > 0$, $f'(x)$ en fonction de $f'(1)$
3. Conclure

Exercice 30 : On souhaite déterminer toutes les fonctions définies et dérivables sur $I =]-1;1[$, autres que la fonction nulle, et telles que pour tout x et pour tout y dans I :

$$f(x)f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

Soit φ une fonction vérifiant ces conditions.

1. Déterminer $\varphi(0)$
2. Montrer que φ ne s'annule pas sur I et que pour tout x de I : $\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}$
3. Soit x un élément de I. Soit h un élément de I tel que $x + h \in I$

a) Montrer qu'il existe y appartenant à I tel que $x + h = \frac{x+y}{1+xy}$

b) En déduire que $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi'(0)}{1-x^2}$. Indications : $\varphi'(x)$ correspond à la limite d'un taux d'accroissement.

c) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$

d) En déduire l'expression de $\varphi(x)$

4. Répondre au problème posé.

La recherche de primitives n'est pas toujours évidente à mettre en œuvre. Il est parfois nécessaire de « travailler » l'expression de f' pour la mener à bien. Dans l'exercice précédent par exemple, la question 3c) utilise une technique dite de décomposition en éléments simples pour réussir à déterminer l'expression de la primitive recherchée.

D'autres méthodes existent, tel que le calcul intégral.

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit F est une primitive quelconque de f sur I et a et b deux réel de l'intervalle I. On appelle intégrale de a à b de f le réel défini par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque : Le calcul de l'intégral par cette méthode est indépendant de la primitive choisie.

Exemples : Calculer :

1. $\int_{-1}^{2} x^3\,dx$ 2. $\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx$ 3. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$

Il y a différentes propriétés que l'on peut démontrer sur les intégrales. Ici nous allons nous intéresser à l'intégration par parties :

Formule d'intégration par parties :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' sont continues sur I, alors pour tous réels a et b appartenant à I :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Exercice 32 : On considère la fonction G définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $G(x) = \int_e^x \ln(t)\,dt$

1. Que représente la fonction G pour la fonction logarithme népérien ?
2. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer G

Exercice 33 : En utilisant la même méthode qu'à l'exercice précédent, déterminer la primitive qui s'annule en 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^x$

Exercice 34 : Déterminer la primitive qui s'annule en 1 de la fonction définie sur $]-1;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

Exercice 35 : Extrait du concours général

On appelle fonction de type T_0 les fonctions « trinômes » sur [–1 ; 1] définies par :

$$t(x) = ax^2 + bx + c$$

a, b et c étant des réels quelconques.

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle fonction de type T_n les fonctions de la forme $f + \lambda|g|$, λ étant un réel quelconque et f et g étant des fonctions quelconques de type T_{n-1}.

1. Etablir que la fonction φ définie par $\varphi(x) = 0$ pour tout x de [–1 ; 0] et $\varphi(x) = x$ pour tout x de [0 ; 1] est de type T_1.
2. Soit P un trinôme défini sur [–1 ; 1] tel que $P(0) = 0$.
   a. Montrer qu'il existe un réel k positif ou nul tel que pour tout x de [–1 ; 1],
   $$|P(x)| \leq k|x|.$$
   b. Que vaut $\psi(x) = |P(x) + kx| - |kx|$ suivant le signe de x ?
3. On considère deux trinômes t_1 et t_2 tels que $t_1(0) = t_2(0)$ et on définit la fonction f sur [–1 ; 1] telle que :
   Pour tout réel x de [–1 ; 0], $f(x) = t_1(x)$ et pour tout réel x de [0 ; 1], $f(x) = t_2(x)$.
   Démontrer qu'il existe un entier N tel que f soit de type T_N.

Exercice 36 : Extrait du concours général (2019)

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $[0,+\infty[$.

Pour f et g dans $\mathscr{P}$, on définit la fonction $h = f \circ g$ en posant, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$h(x) = f\left(g(x)\right).$$

Si, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant g(x)$, on note $f \geqslant g$.

On note u et v les fonctions de $\mathscr{P}$ définies, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par

$$u(x) = e^x - 1 \text{ et } v(x) = \ln(x+1).$$

La fonction f est une *fonction polynomiale* si f est nulle ou s'il existe un entier $d \geqslant 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ avec $a_d \neq 0$ tels que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Les nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ sont alors appelés coefficients de la fonction polynomiale f.

Si $\mathscr{S}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$, on définit les propriétés :

(P1) $\mathscr{S}$ contient u et v.

(P2) $\mathscr{S}$ contient toutes les fonctions constantes positives.

(P3) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f + g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P4) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f \circ g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P5) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$ avec $f \geqslant g$, alors $f - g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P6) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f \times g$ est dans $\mathscr{S}$.

1) Soit $\mathscr{T}$ un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P3)**, **(P4)**, **(P5)** et **(P6)**.
   a) Soit ℓ la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par $\ell(x) = x$. Démontrer que la fonction ℓ est dans $\mathscr{T}$.
   b) Déterminer toutes les fonctions affines qui sont dans $\mathscr{T}$.
   c) Soit p la fonction polynomiale définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Démontrer que la fonction p est dans $\mathscr{T}$.
   d) Une fonction polynomiale de $\mathscr{P}$ est-elle toujours dans $\mathscr{T}$?