

Travaux algébriques

1. Partie entière

(a) Notions

Définition : Pour tout x réel, on note $E(x)$, partie entière de x , l'entier relatif tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Exemple 1

$$E(5,46) = 5 \text{ car } 5 \leq 5,46 < 6.$$

$$E(-8,6) = -9 \text{ car } -9 \leq -8,6 < -8.$$

(b) Exercices

* Exercice 1

Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n non nul,

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$$

* Exercice 2

Trouver x tel que $x \times E(x \times E(x \times E(x))) = 88$.

* Exercice 3 Extrait du sujet du concours général 2022.

On dit qu'un réel x est *pétillant* si $x \geq 0$ et si, pour tout entier $n \geq 1$, le nombre $E(x^{2n}) + 2$ est le carré d'un entier.

(a) Démontrer que le réel $\frac{3}{2}$ n'est pas pétillant.

(b) Démontrer que l'intervalle $[0; 1[$ ne contient aucun réel pétillant.

(c) i. Démontrer que, si un réel x est pétillant, alors x^2 l'est également.

ii. Démontrer que, s'il existe un réel pétillant, alors il existe une infinité de réels pétillants.

(d) Démontrer qu'aucun entier naturel n'est pétillant.

2. Valeur absolue

(a) Notions

Définition : Pour tout réel x , on note $|x|$ la valeur absolue de x telle que :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 2

$$|4| = 4.$$

$$|-4| = 4.$$

Propriété : Soit a un réel positif, alors :

- si $|x| \leq a$ alors $-a \leq x \leq a$.
- si $|x| \geq a$ alors $-a \geq x$ ou $x \geq a$.

Propriété : Pour tous réels a et b :

- $|a + b| \leq |a| + |b|$ (inégalité triangulaire)
- $|a - b| \geq |a| - |b|$
- $|ab| = |a||b|$
- Si b est non nul, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
- Pour tout entier naturel n , $|a^n| = |a|^n$
- $\sqrt{a^2} = |a|$

(b) Exercices

* Exercice 4

Simplifier les fonctions suivantes :

$$f(x) = |x^2 - 10x + 21|$$

$$g(x) = \left| \frac{(2x - 6)(3x + 7)}{x + 5} \right|$$

* Exercice 5

Résoudre $|x + 5| > |2x - 3|$.

* Exercice 6

Résoudre $|x + 2| + |2x + 8| = 8$.

* Exercice 7

Démontrer l'inégalité triangulaire.

3. Inégalités de réordonnement

(a) Notions

Propriété : Inégalité de réordonnement $n = 2$

Soient a, b, c et d des réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$, alors :

$$ac + bd \geq ad + bc$$

Propriété : Inégalité de réordonnement $n = 3$

Soient a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 des réels tels que $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ et $b_1 \leq b_2 \leq b_3$, alors :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

est la somme maximale parmi toutes les sommes de produits de a et b .

(b) Exercices

* **Exercice 8**

Montrer que pour tous réels x et y , $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

* **Exercice 9**

Montrer que pour tous réels x, y et z , $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$.

4. **Inégalités de Chebychev**

(a) Notions

Propriété : Inégalité de Chebychev $n = 2$

Soient a, b, c et d des réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$, alors :

$$ac + bd \geq \frac{1}{2}(a+b)(c+d)$$

Propriété : Inégalité de Chebychev $n = 3$

Soient a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 des réels tels que $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ et $b_1 \leq b_2 \leq b_3$, alors :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$$

(b) Exercices

* **Exercice 10**

Montrer que pour tous réels x, y et z ,

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

5. **Inégalités de la moyenne**

(a) **Notions**

Propriété : Inégalité de la moyenne $n = 2$

Soient a, b des réels strictement positifs, alors :

$$ab \leq \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2$$

Propriété : Inégalité de la moyenne n quelconque

Soient a_1, a_2, \dots, a_n des réels strictement positifs, alors :

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)\right)^n$$

(b) **Exercices**

* **Exercice 11**

Montrer que pour tous réels a_1, a_2, \dots, a_n strictement positifs,

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)^n \geq \frac{n^n}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

* **Exercice 12**

Montrer que

$$1 \times 2 \times \dots \times n \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

6. **Inégalités de Cauchy-Schwarz**

(a) **Notions**

Propriété : Inégalité de Cauchy-Schwarz $n = 2$

Soient a, b, c et d des réels, alors :

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}$$

Propriété : Inégalité de Cauchy-Schwarz n quelconque

Soient a_1, a_2, \dots, a_n et b_1, b_2, \dots, b_n des réels, alors :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

7. Inégalités triangulaires

(a) Notions

Propriété : Inégalité triangulaire $n = 1$

Soient a, b des réels, alors :

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$$

Propriété : Inégalité de Cauchy-Schwarz n quelconque

Soient a_1, a_2, \dots, a_n et b_1, b_2, \dots, b_n des réels, alors :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

8. Exercices sur les inégalités

* Exercice 13

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est convexe sur I si pour tous x et y de I et pour tout λ de $[0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

(a) Montrer que la fonction carrée est convexe sur \mathbb{R} .

(b) Soient α, β et γ , trois réels positifs ou nuls tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I .

Montrer que, pour tous x, y et z de I ,

$$f(\alpha x + \beta y + \gamma z) \leq \alpha f(x) + \beta f(y) + \gamma f(z)$$

(c) Soient x, y et z des réels, montrer que :

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$$

* Exercice 14

Soient a, b et c trois réels compris entre 0 et 1 tels que $a + b + c = 1$. On note $p = 1 - 6abc$.

(a) Montrer que $p \geq \frac{7}{9}$.

(b) On suppose que $0 < c < b < a < 1$.

Montrer que $a > \frac{1}{3}$, $c < \frac{1}{3}$ et $b < \frac{1}{2}$.

(c) On pose $X = \frac{a^2(3 - 2a)}{p}$, $Y = \frac{b^2(3 - 2b)}{p}$ et $Z = \frac{c^2(3 - 2c)}{p}$.

Montrer que $0 < Z < Y < X$.

(d) Montrer que $X - Y > a - b$ et que $X - Z > a - c$.

9. Exercices sur les fonctions affines par morceaux

* Exercice 15

Soit f une fonction définie et continue sur $[0; 1]$.

On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que pour tout x de $\left[0; \frac{7}{10}\right]$, $f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$.

(a) Démontrer que f s'annule au moins sept fois sur $[0; 1]$.

(b) Donner un exemple d'une telle fonction. On pourra se contenter d'une représentation graphique.

* Exercice 16

Mon boucher ne connaît pas les centimes. Par exemple, j'ai pris 300g de filet à 34,3 euros le kilo, 240g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640g de blanc de poulet à 12,99 le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.

En ramassant deux tickets par terre, le boucher lit :

· 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros.

· 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.

Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?