Correction des exercices

Exercice 1

On étudie le signe de $v_{n+1} - v_n$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_1 + \dots + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$$

$$= \frac{n u_{n+1} - (u_1 + \dots + u_n)}{n(n+1)}$$

$\forall n \geq 1$, $n(n+1) > 0$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n$ est du signe de $n u_{n+1} - (u_1 + \dots + u_n)$.

On étudie deux cas :

- Si (u_n) est croissante alors :

$$u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1}$$

donc $\sum_{k=1}^{n} u_k \leq n u_{n+1}$

donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$

La suite (v_n) est alors elle aussi croissante

- Si (u_n) est décroissante alors :

$$u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq u_{n+1}$$

donc $\sum_{k=1}^{n} u_k \geq n u_{n+1}$

donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$

La suite (v_n) est alors elle aussi décroissante.

Remarque ; si (u_n) est constante, il existe un réel m tel que $u_n = m$ quel que soit n. La suite (v_n) est alors également constante, tous ses termes sont égaux à m.

Exercice 2

Les termes de cette suite sont strictement positifs

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

A n fixé, la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Donc $n^n \leq (n+1)^n$

$\forall n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, la suite (u_n) est par conséquent strictement décroissante.

Exercice 3

La stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$ implique que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\ln(n^2+1) > \ln n^2$

Par ailleurs, $\sin\sqrt{n} \geq -1$ quel que soit n.

On déduit que : $\forall n \geq 1$, $v_n \geq 2\ln(n) - \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \to +\infty} 2\ln(n) - \frac{1}{2} = +\infty$$

D'après le théorème 1, on aura : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{2} \times \cdots \times \frac{2}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2}{k}$$

$\forall k \geq 3$, $\frac{2}{k} \leq \frac{2}{3}$

Ainsi, $\frac{2^n}{n!} \leq 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

$0 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 0$

D'après la proposition 3, on aura $l \leq 0$

Les termes de (u_n) sont positifs, donc $l \geq 0$.

Conclusion : $l = 0$.

Exercice 5

Chacun des n termes de la somme peut être encadré par des termes indépendants de k.

En effet $\forall 1 \leq k \leq n$, $n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$

D'où $$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$$

D'où $$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

or $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 6

1. un exemple de suite convergente non monotone.

$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad (n \geq 0)$$

2. un exemple de suite bornée divergente.

$$v_n = (-1)^n \quad (n \geq 0)$$

3. un exemple de suite non bornée qui ne tend pas vers $\pm$

$$w_n = n \times \cos(n\pi) \quad (n \geq 0)$$

Exercice 7

1) $$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$$

2) Montrons que la suite (u_n) est majorée.

$\forall k \geq 2$, $\quad k^2 \geq k(k-1)$

Donc $$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

En sommant les membres de cette inégalité, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

or $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$ (une telle somme est appelée somme télescopique)

Ainsi $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

D'où $u_n \leq 2$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc (u_n) est croissante.

Conclusion : (u_n) est une suite croissante et majorée donc elle converge d'après le théorème 3.

Exercice 8

1) $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

$\forall\ 1+n \leq k \leq 2n$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1+n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n}$

soit $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$

2) Raisonnons par l'absurde et supposons que (S_n) converge vers une limite finie l.

$$\lim_{n \to +\infty} (S_{2n} - S_n) = l - l = 0$$

ce qui contredit l'inégalité précédente.

Si (S_n) était majorée alors (S_n) serait une suite croissante (ce qui se justifie facilement...) et majorée. Elle serait par conséquent convergente. Nous venons de prouver que ce n'est pas le cas.