Correction des extraits de sujets 2014 et 2015

Sujet 2014

1. On remarque que $b_0 = x_1 - qx_0$, ce qui établit l'égalité demandée pour $n = 1$

$$\begin{aligned} q^n x_0 + q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + ... + qb_{n-2} + b_{n-1} &= q^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k} b_k \\ &= q^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k}(x_{k+1} - qx_k) \\ &= q^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k} x_k \\ &= q^n x_0 + \sum_{k=1}^{n} q^{n-k} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k} x_k \\ &= q^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k} x_k - q^n x_0 + x_n - \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k} x_k \\ &= x_n \end{aligned}$$

2. D'après l'égalité précédente, $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$|x_n - q^n x_0| = |q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + ... + qb_{n-2} + b_{n-1}|$$

Par hypothèse, cette somme ne comporte que des termes positifs.
Ainsi, $|q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + ... + qb_{n-2} + b_{n-1}| = q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + ... + qb_{n-2} + b_{n-1}$.
De plus, $0 \leq b_n \leq \epsilon$, donc : $|x_n - q^n x_0| \leq \epsilon(q^{n-1} + q^{n-2} + ... + q + 1)$
On reconnaît la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.

$$q^{n-1} + q^{n-2} + ... + q + 1 = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$0 < q < 1$ implique que $0 < \frac{1-q^n}{1-q} < \frac{1}{1-q}$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $|x_n - q^n x_0| < \frac{\epsilon}{1-q}$.
Pour $n = 0$, $|x_n - q^n x_0| = 0$ donc l'inégalité reste trivialement vraie.
$\forall n \in \mathbf{N}$, on pose $y_n = q^n x_0$. (y_n) est alors une suite géométrique vérifiant l'inégalité demandée.

3. Montrons que la suite (u_n) est croissante.
$\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{b_n}{q^{n+1}} \geq 0$ par hypothèse sur b_n et q.
La suite (u_n) est croissante.
Montrons maintenant que la suite (u_n) est majorée.
$u_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{q^{k+1}} \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{q^{k+1}}$ toujours par hypothèse sur b_k $(k \geq 0)$
Or, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{q^{k+1}} = \epsilon(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{q^k}) = \frac{\epsilon}{q} \frac{1-\frac{1}{q^n}}{1-\frac{1}{q}} < \frac{\epsilon}{q} \frac{1}{1-\frac{1}{q}}$ (car $q > 0$)
Et, $\frac{\epsilon}{q} \frac{1}{1-\frac{1}{q}} = \frac{\epsilon}{q-1}$
Ce qui prouve que (u_n) est majorée.
(u_n) est une suite croissante et majorée. D'après le théorème 3, la suite (u_n) est convergente.

Sujet 2015

1. $\forall n \in \mathbf{N}^*$,
$$\frac{(u_{n+1}-C)+(u_{n+2}-C)+...+(u_{2n}-C)}{n} = \frac{u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{2n}-nC}{n}$$
$$= u_n - C$$
Par conséquent, la suite $(u_n - C)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est de type M

2. On considère une suite (u_n) croissante et de type M.
On a alors :
$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq ... \leq u_{2n-1} \leq u_{2n}$$
Donc : $u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{2n} \geq nu_{n+1}$
Puis : $u_{n+1} \leq \frac{u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{2n}}{n}$
(u_n) étant de type M, ceci implique que $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_{n+1} \leq u_n$.
(u_n) étant supposée croissante, on a aussi $u_{n+1} \geq u_n$.
On déduit que, $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_{n+1} = u_n$.

3. On écrit la relation caractérisant les suites de type M aux rangs $n=1$ et $n=2$:
Pour $n=1$ on obtient : $u_1 = u_2$.
Pour $n=2$, on obtient $u_2 = \frac{u_3+u_4}{2}$.
Si $u_n = an^2+bn+c$ alors le triplet $(a;b;c)$ vérifie le système suivant :
$$\begin{cases} 4a+2b+c = a+b+c \\ 9a+3b+c+16a+4b+c = 2(a+b+c) \end{cases}$$
La résolution de ce système mène à : $a=b=0$

4. Tout d'abord, $1 \leq r < p$ implique que $1 \leq r \leq p-1$ et donc $p \geq 2$.
Notons q le plus grand indice possible inférieur à $p-1$ tel que :
$$u_q = min(u_1, u_2, ..., u_{p-1})$$
Ainsi, $q < p$ et $\forall n \in \{1, 2, ..., p-1\}, u_q \leq u_n$ (avec inégalité stricte si $n > q$).

Raisonnons par l'absurde et supposons que $2q < p$,
$u_q = \frac{u_{q+1}+...+u_p+...+u_{2q}}{q} > \frac{qu_q}{q} = u_q$, ce qui est absurde. Donc,
$$p \leq 2q$$
$r \leq p-1$ donc $u_q \leq u_r$ avec $q < p \leq 2q$

Montrons maintenant l'existence de q'. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'une telle valeur n'existe pas, ce qui revient à dire que $\forall n \in \{p, p+1, ..., 2q\}$, on ait $u_n > u_q$.
$u_q = \frac{u_{q+1}+...+u_{p-1}+u_p+...+u_{2q}}{q} > \frac{qu_q}{q} = u_q$
En effet, les termes u_p, u_{p+1}, ... , u_q sont tous strictement supérieurs à u_q par hypothèse. Et les termes u_{q+1}, ... , u_{p-1} sont tous supérieurs ou égaux à u_q par définition de q.
Ceci est absurde d'où l'existence de q'.
Conclusion : il existe deux entiers q et q' tels que $1 \leq q < p \leq q' \leq 2q$ et $u_{q'} \leq u_q \leq u_r$.

$u_q = min(u_1, u_2, ..., u_{p-1})$ donc pour tous les entiers k compris entre $q+1$ et $p-1$ on a $u_k \geq u_q$.
D'où :
$$u_{q+1}+...+u_{p-1} \geq (p-q-1)u_q$$

Donc $qu_q \geq (p-q-1)u_q + u_p + ... + u_{q'} + ... + u_{2q}$ soit

$$u_p + ... + u_{q'} + ... + u_{2q} \leq (2q-p+1)u_q$$

(**)
Les termes de la suite (u_n) sont positifs donc : $pu_p \leq u_{p+1} + ... + u_{2p} + u_{2p+1} + ... + u_{2q'}$
Si $p+1 \leq q'$, $pu_p \leq u_{p+1} + ... + u_{q'} + u_{q'+1} + ... + u_{2q'}$, en utilisant la caractérisation des suites de type M, on obtient alors

$$pu_p \leq u_{p+1} + ... + u_{q'} + q'u_{q'}$$

(***)
Si $p = q'$, on a $pu_p = q'u_{q'}$ et l'inégalité large reste vraie.
Faisons (**) + (***),on déduit :

$$(p+1)u_p + u_{q'+1} + ... + u_{2q} \leq q'u_{q'} + (2q-p+1)u_q$$

Les termes de la suite (u_n) étant positifs, on déduit que :

$$(p+1)u_p \leq q'u_{q'} + (2q-p+1)u_q$$

Or, $0 \leq u_{q'} \leq u_q \leq u_r$, donc :

$$(p+1)u_p \leq (q' + 2q - p + 1)u_r \iff u_p \leq \frac{2q+q'-p+1}{p+1}u_r$$

Il reste à montrer que $2q + q' - p + 1 \leq 3q$.
$q+1 \leq p \leq 2q$ donc $-p \leq -q-1$ et $q' \leq 2q$ d'où $2q + q' - p + 1 \leq 2q + 2q - q - 1 + 1 = 3q$.
Donc $u_p \leq \frac{3q}{p+1}u_r$
Enfin, $q < p < p+1$ donc $\frac{q}{p+1} < 1$ et on obtient bien

$$u_p \leq 3u_r$$