Exercice 11 : Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et en 1 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$$

Montrer que f est constante.

Indication : commencer par étduier la parité de f.

Pour tout $x > 0$, remarquer $(x^{\frac{1}{2^n}})$ converge vers 1 et utiliser la continuité de f en 1.

Solution : On peu déjà remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)$$

La fonction f est paire. Il suffit donc de montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^+$

Soit $x > 0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$ et que f est continue en 1 :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(1)$$

Or $f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f((x^{\frac{1}{2^n}})^2) = f(x^{\frac{1}{2^{n-1}}}) = f(x^{\frac{1}{2^{n-2}}}) = \cdots = f(x)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(x)$

Par unicité de la limite, il vient $f(x) = f(1)$

f est donc constante et égale à $f(1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis par parité, f est constante sur $\mathbb{R}^*$

Reste à déterminer $f(0)$

Comme f est supposée continue en 0 : $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

f étant constante sur $\mathbb{R}^*$: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(1)$.

On a donc : $f(0) = f(1)$: f est constante sur $\mathbb{R}$.

Synthèse : Les fonctions constantes vérifient clairement l'équation fonctionnelle.

Conclusion : Les seules solutions de cette équation fonctionnelle sont les fonctions constantes.

Exercice 12 : Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

a) On suppose que $f(0) = 0$. Vérifier que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$
Donner alors la forme de la fonction f

b) On revient au cas général. Déterminer f.

Solution :

a) $\forall x \in \mathbb{R} : f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(0)\big) = \frac{1}{2}f(x)$
Ceci étant vrai pour tout réel x, on a notamment que :
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x+y)$$
Or d'après l'équation fonctionnelle vérifiée par f

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2}f(x+y) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)$$

Et donc $f(x+y) = f(x) + f(y)$

On retrouve l'équation fonctionnelle de Cauchy (exercice 10) et on en déduit que $f(x) = ax$ avec a réel

b) Revnons au cas général : considérons la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(0)$

On a $g(0) = 0$ et $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big) - f(0) \end{aligned}$$

En remarquant que $f(0) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(0)$ il vient que :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \frac{1}{2}\big(f(x) - f(0)\big) + \frac{1}{2}\big(f(y) - f(0)\big) \\ &= \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(y) \\ &= \frac{1}{2}\big(g(x) + g(y)\big) \end{aligned}$$

Ainsi, g vérifie l'équation fonctionnelle et $g(0) = 0$

D'après la question a) : $g(x) = ax$ avec a réel.

Par suite $f(x) = g(x) + f(0) = ax + f(0) = ax + b$ en posant $b = f(0)$

f est donc une fonction affine.

Synthèse : les fonctions affines vérifient bien l'équation fonctionnelle.

Les solutions de cette équation fonctionnelle sont donc les fonctions affines.

<u>Exercice 13 :</u> Déterminer toutes les fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Analyse : Soit f une solution de l'équation fonctionnelle.

En prenant $x = y = 0$, on obtient que $f(0)^2 - f(0) = 0$ soit $f(0)^2 = f(0)$

Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$

Si $f(0) = 0$: reprenons l'équation fonctionnelle pour tout réel $x \neq 0$ et fixons $y = 0$.

Il vient : $f(x)f(0) - f(0) = x$ c'est-à-dire : $x = 0$: on obtient une contradiction.

Le cas $f(0) = 0$ est donc impossible.On a donc $f(0) = 1$

Reprenons l'équation fonctionnelle pour tout réel $x \neq 0$ et fixons $y = 0$

On obtient cette fois : $f(x)f(0) - f(0) = x$

$$f(x) - 1 = x$$

$$f(x) = x + 1$$

Donc si f est solution, la seule fonction possible est : $f(x) = x + 1$

Synthèse : on vérifie que $f(x) = x + 1$ est bien solution de l'équation fonctionnelle.

Conclusion : L'unique solution est $f(x) = x + 1$

I. Dérivation et équation fonctionnelle

Définition

Une fonction est dérivable en a si la limite de son taux d'accroissement est fini :

Le taux d'accroissement est défini par la formule : $T(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{x\to a} T(x) = f'(a)$

Exercice 14 : Démontrer qu'une fonction dérivable en a est continue en a.

Solution : Considérons une fonction f dérivable en a c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to a} T(x) = f'(a)$

Comme $T(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ on en déduit que $f(x) - f(a) = T(x)(x-a)$

Or $\lim\limits_{x\to a} T(x) = f'(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} x - a = 0$ par produit $\lim\limits_{x\to a} T(x)(x-a) = 0$

Ce qui signifie que $\lim\limits_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$ c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$: c'est la défintion de f continue en a.

Que penser de la réciproque ?

Penser à la fonction valeur absolue continue en 0 mais non dérivable en 0.

Exercice 15 : La fonction $f(x) = \sqrt{3x-4}$ est-elle dérivable en $\frac{4}{3}$?

f est définie sur $[\frac{4}{3} ; +\infty[$ Etudions sa dérivabilité en $\frac{4}{3}$ c'est-à-dire la limite de son taux d'accroissement en $\frac{4}{3}^+$

$$T(x) = \frac{f(x) - f\left(\frac{4}{3}\right)}{x - \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3x-4}}{x-\frac{4}{3}}$$

En $\frac{4}{3}$ cette limite est une forme indéterminée "$\frac{0}{0}$"

$$T(x) = \frac{\sqrt{3x-4}}{x-\frac{4}{3}} \times \frac{\sqrt{3x-4}}{\sqrt{3x-4}}$$

$$= \frac{3x-4}{\left(x-\frac{4}{3}\right)\sqrt{3x-4}}$$

$$= \frac{3\left(x-\frac{4}{3}\right)}{\left(x-\frac{4}{3}\right)\sqrt{3x-4}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3x-4}}$$

Et $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}^+} T(x) = +\infty$: La fonction f n'est pas dérivable en $\frac{4}{3}^+$

Exercice 16 : Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$; $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ et $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 5x - 4}{x + 1}$

Solution : Toutes ces limites nous donnent des formes indéterminées $0/0$

Or : $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0}$

Ainsi $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0}$ on reconnait le taux d'accroissement de la fonction $f(x) = e^x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en 0 : Ainsi $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1$

Avec $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ on remarque que : $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ avec $f(x) = \sqrt{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$\frac{x^3 - 5x - 4}{x + 1} = \frac{x^3 - 5x - 4}{x - (-1)} = \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$ avec $f(x) = x^3 - 5x$ qui est dérivable :

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 5x - 4}{x + 1} = f'(-1) = -2$$

Théorème :

Soit $v: I \to J$ une fonction définie et dérivable sur I et $v : K \to \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur K avec $J \subset K$

La fonction $u \circ v$ est dérivable sur I et : $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$. C'est-à-dire :

$$\forall x \in I, (u \circ v)'(x) = v'(x)u'(v(x))$$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction : $f(x) = (4x^2 + 3)^{10}$

$$f(x) = u \circ v(x)$$

Avec $u(x) = x^{10}$ et $v(x) = 4x^2 + 3$

$u'(x) = 10x^9$ $\quad$ $v'(x) = 8x$

$$f'(x) = 8x \times 10(4x^2 + 3)^9$$

$$f'(x) = 80x(4x^2 + 3)^9$$

Exercice 17 : Démontrer que $\forall x > 0, ln'(x) = \frac{1}{x}$

Solution : Comme pour tout $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$

En dérivant les deux membres on en déduit que $\left(e^{\ln(x)}\right)' = 1$

Or par composition $\left(e^{\ln(x)}\right)' = ln'(x)e^{\ln(x)} = ln'(x) \times x$

Ainsi $ln'(x) \times x = 1$ d'où : $ln'(x) = \frac{1}{x}$

Exercice 18 : Soient a, b et x trois réel strictement positifs avec $a < b$.

Démontrer l'inégalité : $0 < be^{-ax} - ae^{-bx} < b - a$

Solution :

Posons $f(x) = be^{-ax} - ae^{-bx}$

$$f'(x) = -abe^{-ax} + abe^{-bx}$$

$$= ab(e^{-bx} - e^{-ax})$$

Comme a, b et x sont strictement positifs : $a < b \Leftrightarrow ax < bx \Leftrightarrow -ax > -bx$

Exponentielle étant strictement croissante, elle conserve l'ordre :

$$e^{-ax} > e^{-bx}$$

On a ainsi montré que $f'(x) < 0$

f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

De plus, $f(0) = b - a > 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. La fonction f étant strictement décroissante :

$0 < f(x) < b - a$: l'inégalité est prouvée.

Exercice 19 :Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $\ln(x) = kx^2$ où k est un réel.

Solution : Déterminer le nombre de solutions de cette équation, revient à déterminer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) - kx^2 = 0$

Posons $f(x) = \ln(x) - kx^2$. f est dérivable sur $]0\,;\ +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2kx$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2kx^2}{x}$$

$x > 0$, le signe de f' dépend de celui de $1 - 2kx^2$

- Si $k \leq 0$ alors $1 - 2kx^2 > 0$ et donc f est strictement croissante.

  $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty, par\ somme :\ \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

  $\lim_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$ et comme $k < 0$: $\lim_{x \to +\infty} -kx^2 = +\infty$ ainsi par somme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  f est donc continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ à valeurs dans $]-\infty; +\infty[$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $]0\,; +\infty[$

- Si $k > 0$, nous devons étudier le signe de $1 - 2kx^2$

  $$1 - 2kx^2 > 0$$

  $$x^2 < \frac{1}{2k}$$

  La fonction racine carrée étant strictement croissante, elle conserve l'ordre et de plus comme $x > 0$: $\sqrt{x^2} = |x| = x$

  $$x < \sqrt{\frac{1}{2k}}$$

x	0	$\sqrt{\frac{1}{2k}}$	$+\infty$
Signe de f'	$+$		$-$
Variations de f	$-\infty \nearrow$	M	$\searrow -\infty$

Limite en $+\infty$: Avec $k > 0$, on a une forme indéterminée $\infty - \infty$: on factorise par x^2

$$f(x) = x^2(\frac{\ln(x)}{x^2} - k)$$

Par croissance comparée : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} - k = -k$

Par produit, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Calcul de $f\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) - k\sqrt{\frac{1}{2k}}^2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2k}\right) - k \times \frac{1}{2k}$

$$= -\frac{1}{2}\ln(2k) - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(\ln(2k) + 1)$$

Donc $M = -\frac{1}{2}(\ln(2k) + 1)$

D'après le tableau de variations si $M < 0$: l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution.

Si $M = 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution : M

Si $M > 0$ alors d'après le théorème de la bijection appliquée sur l'intervalle $]0\,;\sqrt{\frac{1}{2k}}[$ puis sur $]\sqrt{\frac{1}{2k}}\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions

Etudions alors le signe de M

$$-\frac{1}{2}(\ln(2k) + 1) > 0$$

$$\ln(2k) + 1 < 0$$

$$\ln(2k) < -1$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante :

$$2k < e^{-1}$$

$$k < \frac{e^{-1}}{2}$$

Ou encore :

$$k < \frac{1}{2e}$$

Bilan de l'étude :

- Si $k \leq 0$ ou si $k = \frac{1}{2e}$, l'équation a une unique solution
- Si $0 < k < \frac{1}{2e}$, l'équation a deux solutions
- Si $k > \frac{1}{2e}$ l'équation n'a aucune solution.

<u>Exercice 20 :</u> On considère une fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Déterminer la dérivée de la fonction :

$$g: x \mapsto f(xy)$$

Solution : $g(x) = f\big(u(x)\big)$ avec $u(x) = xy$. Si on dérive par rapport à x, y est vu comme une constante et $u'(x) = y$

En appliquant la formule de dérivation des fonctions composées :

$$g'(x) = yf'(xy)$$

Exercice 21 : Revenons sur l'équation fonctionnelle de Cauchy : Déterminer les solutions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables et vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Solution :

En dérivant l'équation fonctionnelle par rapport à x, il vient :

$$f'(x+y) = f'(x)$$

Ceci étant vrai pour tous réels x et y il vient en prenant $x = 0$:

$$f'(y) = f'(0)$$

f est donc de dérivée constante : ce qui signifie que f est affine. On a donc $f(x) = ax + b$ avec a et b réels.

De plus, $f(0) = 0$ (déjà vu dans l'exercice 10) donc $b = 0$. f est donc linéaire.

On vérifie ensuite que les fonctions linéaires sont bien des solutions de cette équation fonctionnelle.

On retrouve donc que les seules solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy sont les fonctions linéaires.

Exercice 22 : On chercher les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'équation fonctionnelle :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y), pour\ tous\ x, y \in \mathbb{R}$$

1. Chercher des solutions particulières :
   a) Déterminer quelles sont les fonctions constantes solutions de cette équation fonctionnelle.
   b) Montrer que les fonctions de la forme $f(x) = e^{ax}$, où a est un réel, sont solutions de cette équation fonctionnelle.
2. On suppose que f est une solution de cette équation fonctionnelle et que f n'est pas identiquement nulle.
   a) Déterminer $f(0)$
   b) Montrer que $f(x) \geq 0$ (Indications : pensez que $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \ldots$)
   c) En déduire que $f(x) > 0$
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$
4. Justifier que la fonction $g(x) = \ln(f(x))$ est bien définie et montrer que g vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy. En déduire l'expression de f
5. Conclure

Solution :

1. a) Supposons f constante : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k$ avec k réel. Alors $f(x+y) = k$
   Or
   $$f(x+y) = f(x) \times f(y) = k^2$$
   $$On\ a\ donc\ k = k^2$$
   $$k = 0\ ou\ k = 1$$
   Les seules fonctions constantes solution sont $f(x) = 0\ et\ f(x) = 1$
   c) $f(x+y) = e^{a(x+y)} = e^{ax} \times e^{ay} = f(x) \times f(y)$: f est bien solution.
2. a) En reprenant l'équation fonctionnelle avec $y = 0$ on obtient que :
   $$f(x) = f(x) \times f(0)$$
   $$Donc\ f(0) = 1$$

b) En suivant l'indication donnée :

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$$

c) On sait déjà que $f(x) \geq 0$ reste à vérifier si f peut s'annuler.

Par l'absurde, supposons : $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) = 0$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x - y + y) = f(x - y) \times f(y) = 0$ par conséquant f est identiquement annule ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Ainsi $f(x) > 0$

3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$
   On sait que f est dérivable en 0 donc : $\lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{f(h) - f(0)}{h}\right)$ existe et vaut $f'(0)$
   Soit x réel montrons que $\lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$ existe

$$T(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h}$$
$$= \frac{f(x)(f(h) - 1)}{h}$$

Or $f(0) = 1$ donc on peut écrire que :

$$T(h) = f(x)\frac{f(h) - f(0)}{h}$$
$$\lim_{h \to 0} T(h) = f(x)f'(0)$$

T a bien un limite finie : f est dérivable en x. Ceci étant vrai pour tout x, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. Justifier que la fonction $g(x) = \ln(f(x))$ est bien définie et montrer que g vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy. En déduire l'expression de f
   On a montré que si f n'est pas la fonction identiquement nulle alors $f(x) > 0$ ainsi $\ln(f(x))$ est bien définie.
   Or :
$$g(x+y) = \ln(f(x+y)) = \ln(f(x) \times f(y))$$
$$= \ln(f(x)) + \ln(f(y))$$
$$= g(x) + g(y)$$
   g vérifie donc l'équation de Cauchy, et on en déduit que g est linéaire.
   $g(x) = ax$ avec a réel.
$$\ln(f(x)) = ax$$
$$f(x) = e^{ax}$$
5. Conclure.
   Analyse : D'après l'étude faite précédemment, on a vu que si f est solution, alors soit f est identiquement nulle soit $f(x) = e^{ax}$ avec a réel.
   Synthèse : Nous avons déjà vérifié que ces fonctions sont bien solution de l'équation fonctionnelle.
   Conclusion : Les solutions de l'équation fonctionnelle sont la fonction identiquement nulle et les fonctions : $x \mapsto e^{ax}$ avec a réel.
   Remarque : avec $a = 0$ on retrouve la fonction constante $f(x) = 1$ donc il est inutile de la rajouter dans la conclusion.

Exercice 23 : extrait du concours général de 2009

Le but de l'exercice est la recherche des fonctions f définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$, vérifiant pour tout réel x la relation $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, telles que $f(0) = 1$ et que $\dfrac{1 - f(x)}{x^2}$ admette une limite lorsque x tend vers 0, que l'on notera a.

On rappelle que tout x de $[-1, 1]$ s'écrit de façon unique $x = \cos(\theta)$ avec θ dans $[0, \pi]$.

1. (a) Vérifier $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \dfrac{1}{2}$. (On pourra utiliser une formule donnant $\cos(2\alpha)$).

   (b) Montrer, pour θ dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, les relations : $\dfrac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin(\theta)$ et $\cos(\theta) \leqslant 1 - \dfrac{\theta^2}{\pi}$.

2. Soit f une fonction solution du problème On se donne un réel x et l'on pose, pour tout entier naturel n, $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n)$, avec θ_n dans $[0, \pi]$.

   (a) Montrer que f est continue en 0 et que $\lim\limits_{n \to \infty} \theta_n = 0$.

Indications :

1)a) : $\cos(2\alpha) = 1 - sin^2(\alpha)$. On pourra utiliser que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

2a) Commencer par déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos(\theta_n)$ et en déduire un intervalle auquel appartient alors θ_n

Exercice 24 : Extrait du concours général de 2008

On munit le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit S la courbe d'équation

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}.$$

1. Quelle est la nature géométrique de S ?
2. Pour tout couple (u,v) de nombre réels on note U le point de coordonnées (u,v), et pour x dans $\mathbf{R}$ on note $M(x)$ le point de S d'abscisse x. On pose

$$f_U(x) = UM(x), \qquad g_U(x) = \left[f_U(x)\right]^2.$$

   (a) Calculer g_U, g'_U, et g''_U. Résoudre l'équation $g''_U(x) = 0$.

   (b) Donner le tableau des variations de f_U (on ne cherchera pas à calculer explicitement le ou les nombres réels où f_U admet un extremum relatif).

3. On dira qu'un cercle C de centre U et de rayon UM est tangent en M à S si M est un point de S et si les tangentes en M à C et S coincident.

   Soit U un point du plan n'appartenant pas à S, et soit a dans $\mathbf{R}$. Montrer que le cercle de centre U et de rayon $UM(a)$ est tangent en $M(a)$ à S si et seulement si $g'_U(a) = 0$.

4. (a) Montrer que tout point n'appartenant pas à S est centre d'au moins un et d'au plus 3 cercles tangents à S.

   (b) Pour U n'appartenant pas à S, on note $n(U)$ le nombre de réels x pour lesquels le cercle de centre U et de rayon $UM(x)$ est tangent en $M(x)$ à S. Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, caractériser par une égalité ou une inégalité simple l'ensemble des points U n'appartenant pas à S tels que $n(U) = i$. On pourra être amené à discuter selon le signe de $81u^2 - 16v^3$.

   Faire un croquis représentant S et les ensembles trouvés.

Indications :

2 b) : Penser que $f(x) = \sqrt{g(x)}$ et en déduire que les variations de f dépendent de celles de g.

Etudier les variations de g' grâce au signe de g'' en distinguant les cas selon lesquels $g''(x) = 0$ a deux solutions, une seule ou aucune.

A partir de variations de g', déterminer son signe.

Dans le cas où il y a deux solutions, il faudra déterminer les signes de $g'(-\sqrt{v})$ et $g'(\sqrt{v})$. Pour savoir s'ils ont le même signe, calculer $g'(-\sqrt{v}) \times g'(\sqrt{v})$ et distinguer les différents cas possibles.(Il y aura 4 cas à envisager : de même signe, l'un d'eux est nul ou de signes contraires)

Une fois le signe de g' obtenu, en déduire les variations de g puis de f dans chaque cas considéré.

3) Déterminer le coefficient directeur de la tangente en $M(a)$ à S et en déduire un vecteur directeur. Déterminer un vecteur normal de la tangente à C en $M(a)$. Traduire l'orthogonalité des 2 vecteurs à l'aide du produit scalaire.

4) Quelle est la nature de g' ? Combien de racines peut-elle avoir au maximum ?

Exercice 25 : On veut déterminer les fonctions f dérivables en 0 vérifiant : $f(2x) = 2f(x)$

1. Soit f une solution. Déterminer $f(0)$
2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ où f est une solution du problème.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(x)$

c) En déduire $g(x)$ puis une expression de $f(x)$

3. Conclure.

Solution :

1. L'équation fonctionnelle appliquée en$x = 0$ nous donne $f(0) = 2f(0)$ c'est-à-dire : $\boldsymbol{f(0) = 0}$
2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ où f est une solution du problème.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

Et comme $f(0) = 0$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)}$ par définition du nombre dérivé (on reconnait un taux d'accroissement)

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(x)$

<u>Initialisation</u> : $n = 0$ évident.

<u>Hérédité :</u> Supposons la propriété vraie pour un certain entier naturel n. Démontrons la au rang $n + 1$.

Par hypothèse de récurrence :

$$g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(x)$$

$$g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = \frac{f\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^n}}$$

$$= \frac{2f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^n}}$$

$$= \frac{f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^{n+1}}}$$

$$= g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

$$Et\ ainsi\ g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = g(x)$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$

<u>Conclusion :</u> La propriété est vraie au rang n et est héréditaire, par principe de récurrence elle est vraie pour tout n.

c) La suite $\left(g\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$ est une suite constante égale à $g(x)$ donc on a aussi :

$$\lim_{n \to +\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right) = g(x)$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ et comme f est dérivable en 0, elle y est continue et donc g est également continue en 0. Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{x \to 0} g(x) = f'(0)(question\ a))$$

Par unicité de la limite il vient que $g(x) = f'(0)$ pour tout x non nul.

Ainsi : $\frac{f(x)}{x} = f'(0)$ c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{f(x) = kx\ , pour\ tout\ x\ non\ nul}$$

Avec $k = f'(0)$

De plus $f(0) = 0$ donc cette égalité est encore vraie pour $x = 0$.

Ainsi **f est linéaire.**

3. D'après la partie analyse, si f est une solution alors f est linéaire.
   Réciproquement, si f est linéaire, f est vérifie clairement $f(2x) = 2f(x)$ et est dérivable en 0.
   Conclusion : **Les solutions sont les fonctions linéaires.**

III. Equation différentielle et intégration

On appelle équation différentielle une égalité dont l'inconnue est une fonction avec ses dérivées successives et éventuellement une autre fonction.

Notation : On écrit généralement y à la place de $f(x)$ et y' à la place de $f'(x)$ dans les équations différentielles.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $y' = f$ sur I.

Résoudre cette équation différentielle revient à trouver toutes les fonctions g dérivable sur I vérifiant : pour tout $x \in I : g'(x) = f(x)$

Exemple : Trouver une solution de l'équation différentielle $y' = k$ avec k réel ? Peut-on en trouver d'autres ?

Même questions avec les équations différentielles :

$$y' = 2x \quad ; \quad y' = 3x^2 \quad ; \quad y' = y$$

De manière plus générale, on appelle équation différentielle du 1er ordre une équation dans laquelle interviennent une fonction dérivable f, sa dérivée f' et une variable.

Nous allons étudier deux types d'équation différentielle :

- $y' = ay + b$ avec a et b réels, a non nul
- $y' = u$ où u est une fonction

Exercice 26 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y' = ay$
   a) Montrer que les fonction $f(x) = Ce^{ax}$ où C est une constante, sont solutions.
   b) Montrer que ce sont les seules solutions possibles.
2. On cherche maintenant à résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$ où a et b sont des constantes.
   a) Parmi les fonctions constantes, déterminer une solution particulière. On Note f cette solution particulière.
   b) Soit g une solution non constante de l'équation différentielle. En considérant la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$ déterminer l'expression de g
   c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$

Solution :

1. On considère l'équation différentielle $y' = ay$
   a) On a clairement : $f'(x) = af(x)$: f est bien une solution.
   b) Soit g une autre solution de cette équation différentielle.
   Considérons la fonction $h(x) = g(x)e^{-ax}$

$$h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ae^{ax}g(x)$$
$$h'(x) = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$$
$$h'(x) = 0$$

Donc h est une constante : $h(x) = C$ avec C constante :

$$g(x)e^{-ax} = C$$
$$g(x) = Ce^{ax}$$

Les seules solutions possibles sont donc les fonctions : $x \mapsto Ce^{ax}$

2. On s'intéresse désormais à $y' = ay + b$ où a et b sont des constantes.

   a) Solution particulière : soit $\boldsymbol{f(x) = -\frac{b}{a}}$

   $f'(x) = 0$ et $af(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$

   $$f \ vérifie \ bien \ f' = af + b$$

   b) Soit g une solution de l'équation différentielle : $g'(x) = ag(x) + b$

   Considérons alors $h(x) = g(x) - f(x)$

   $$h'(x) = g'(x) - f'(x)$$
   $$h'(x) = ag(x) + b - af(x) - b$$
   $$h'(x) = a\big(g(x) - f(x)\big)$$
   $$h'(x) = ah(x)$$

   Autrement dit $h$est solution de l'équation différentielle $y' = ay$

   On sait d'après la question précédente qu'il existe une constante C telle que :

   $$\boldsymbol{h(x) = Ce^{ax}}$$
   $$g(x) - f(x) = Ce^{ax}$$
   $$\boldsymbol{g(x) = Ce^{ax} + f(x)}$$

   c) On vient de trouver la forme de toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$

   Elles s'écrivent toutes sous la forme $\boldsymbol{g(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}}$. Avec C constante.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Une primitive de f sur I est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Autrement F est une primitive de f sur I si, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = f(x)$

La recherche d'une primitive est l'opération inverse de la dérivation

Propriété :

- Toutes fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur I
- Deux primitives d'une même fonction différent d'une constante.

Exemple 27 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ de les équations différentielles :

$y' = x^3 + 1 \qquad y' = \frac{1}{x} \qquad y' = \frac{1}{xln(x)} \qquad y' = a^x$

Solution

$y' = x^3 + 1$ on recherche une primitive de $x \mapsto x^3 + 1$ les fonctions $y(x) = \frac{x^4}{4} + x + k$, k constante, conviennent.

$y' = \frac{1}{x}$ on recherche une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ les fonctions $y(x) = \ln(x) + k$, k constante conviennent

$y' = \frac{1}{xln(x)}$ 1 on recherche une primitive de $x \mapsto \frac{1}{xln(x)}$ en constatant que : $\frac{1}{xln(x)} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}$ On remarque que la fonction est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$ qui admet pour primitive $\ln\big(u(x)\big)$. Ainsi :

Les fonctions $y(x) = \ln(\ln(x)) + k$, k constante, conviennent.

$y' = a^x$ on recherche une primitive de $x \mapsto a^x$Or $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$ les fonctions $y(x) = \frac{1}{\ln(a)}e^{x\ln(a)} + k$ c'est-à-dire : $x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x + k$, k constante, conviennent

Exercice 28 : On reprend l'équation fonctionnelle de l'exercice 22 : On chercher les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'équation fonctionnelle :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y), pour\ tous\ x, y \in \mathbb{R}$$

En dérivant cette équation fonctionnelle par rapport à x, retrouver la forme des fonctions solutions de ce problème.

Solution : Soit f une fonction dérivable solution de l'équation fonctionnelle.

En prenant $x = 0$, on obtient pour tout y réel : $f(y) = f(0) \times f(y)$, ainsi $f(0) = 1$

Dérivons l'équation fonctionnelle par rapport à x : Pour tous réels x, y :

$$f'(x+y) = f(y)f'(x)$$

En prenant $x = 0$, on obtient que pour tout y :

$$f'(y) = f(y)f'(0)$$

Autrement dit, f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a = f'(0)$, d'après l'exercice 25 :

$$f(x) = Ce^{ax}, C\ constante$$

De plus $f(0) = 1$ implique : $C = 1$

Donc on retrouve que f est de la forme $x \mapsto e^{ax}$ avec $a = f'(0)$ constante.

Exercice 29 : Déterminer les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

1. Déterminer $f(1)$
2. Exprimer, pour tout $x > 0$, $f'(x)$ en fonction de $f'(1)$
3. Conclure

Solution :

1. En prenant $x = 1$, on obtient que pour tout y réel : $f(y) = f(1) + f(y)$ donc $f(1) = 0$
2. En dérivant par rapport à x, on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : yf'(xy) = f'(x)$$

En fixant $x = 1$, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^* : yf'(y) = f'(1)$$

C'est-à-dire :

$$f'(y) = \frac{f'(1)}{y}$$

Posons $k = f'(1)$:

$$f'(y) = \frac{k}{y}$$

f est donc une primitive de $x \mapsto \frac{k}{x}$: ainsi $f(x) = k\ln(x) + C$ avec $k\ et\ C\ constantes$.
De plus, $f(1) = 0$ implique : $k\ln(1) + C = 0$ c'est-à-dire : $C = 0$
Ainsi, $f(x) = k\ln(x)$
Réciproquement, si $f(x) = k\ln(x)$ on a bien : $f(xy) = f(x) + f(y)$.
Conclusion : Les solutions de l'équations fonctionnelles sont les fonctions : $x \mapsto k\ln(x)$ avec k constante.

Exercice 30 : On souhaite déterminer toutes les fonctions définies et dérivables sur $I =]-1;1[$, autres que la fonction nulle, et telles que pour tout x et pour tout y dans I :

$$f(x)f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

Soit φ une fonction vérifiant ces conditions.

1. Déterminer $\varphi(0)$
2. Montrer que φ ne s'annule pas sur I et que pour tout x de I : $\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}$
3. Soit x un élément de I. Soit h un élément de I tel que $x+h \in I$
   a) Montrer qu'il existe y appartenant à I tel que $x+h = \frac{x+y}{1+xy}$
   b) En déduire que $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi'(0)}{1-x^2}$. Indications : $\varphi'(x)$ correspond à la limite d'un taux d'accroissement.
   c) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$
   d) En déduire l'expression de $\varphi(x)$
4. Répondre au problème posé.

Solution :

1. En fixant $y = 0$, on obtient que pour tout x de I :
$$\varphi(x)\varphi(0) = \varphi(x)$$
$$Ainsi\ \varphi(0) = 1$$
2. Soit x appartenant à I alors $-1 < x < 1$ et donc $-1 < -x < 1$: $-x$ est également dans I et l'équation fonctionnelle appliquée en x et $y = -x$ nous donne :
$$\varphi(x)\varphi(-x) = \varphi(0)$$
C'est-à-dire :
$$\varphi(x)\varphi(-x) = 1$$
Donc φ ne s'annule jamais (sinon le produit serait nul) et de plus :
$$\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}$$
3.
   a) Supposons qu'un tel y existe et cherchons à l'exprimer en fonction de x et de h :
$$x+h = \frac{x+y}{1+xy}$$
$$(x+h)(1+xy) = x+y$$
$$x + x^2y + h + hxy = x+y$$
$$h = y(1-x^2-hx)$$
$$h = y\big(1-x(x+h)\big)$$
Il faut maintenant s'assurer que $1 - x(x+h) \neq 0$
$$1 - x(x+h) = 0 \iff x(x+h) = 1$$

Or x et $x+h$ appartiennent à $]-1\,;1[$ donc $x(x+h) \neq 1$ car :

Si $h = -x$ alors $x+h = 0$ et le produit est nul donc différent de 1.

Si $h \neq -x$ alors $x = \frac{1}{x+h}$ et cela contredit $x \in]-1;1[$

Ainsi $x(x+h) \neq 1$ donc $1 - x^2 - hx \neq 0$ et $y = \frac{h}{1-x(x+h)}$

Reste à vérifier que y ainsi définit est bien dans I

Etudions la fonction $g(h) = \frac{h}{1-x(x+h)}$

Comme $x+h \in]-1;1[$; $h \in]-1-x;1-x[$ .La fonction g est définie sur $]-1-x;1-x[$

$$g'(h)=\frac{1-x^2}{\big(1-x(x+h)\big)^2}$$

$$g'>0 \; car \; x^2<1$$

Donc g est strictement croissante sur $]-1-x;1-x[$

$$\lim_{h\to -1-x} g(h)=\frac{-1-x}{1+x}=-1 \quad et \quad \lim_{h\to 1-x} g(h)=\frac{1-x}{1-x}=1$$

Ainsi $g(h) \in]-1;1[$

Il existe donc bien y appartenant à I tel que $x+h=\frac{x+y}{1+xy}$.

b) $\varphi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)-\varphi(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(x)}{h}$$
$$=\varphi(x)\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(y)-1}{h}$$

Or on sait que $\varphi(0)=1$ on peut alors écrire le facteur de droite :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{h}$$

Or $y=\frac{h}{1-x(x+h)}=g(h)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(g(h))-\varphi(0)}{h}$$

Et enfin $g(0)=0$ donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(g(h))-\varphi(g(0))}{h}$$

φ est supposé dérivable, donc elle est dérivable en $g(0)$ et g est dérivable en 0. On reconnait la formule de dérivation en 0 de le composée de fonctions $\varphi\circ g$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(g(h))-\varphi(g(0))}{h}=g'(0)\varphi'(g(0)$$

Or

$$g'(h)=\frac{1-x^2}{\big(1-x(x+h)\big)^2}$$

$$g'(0)=\frac{1-x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1}{1-x^2}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(g(h))-\varphi(g(0))}{h}=\frac{1}{1-x^2}\varphi'(0)$$

On a ainsi :

$$\varphi'(x)=\varphi(x)\times\frac{\varphi'(0)}{1-x^2}$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi'(0)}{1-x^2}$$

c) Pour tous réels a et b :

$$\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{a(1+x)+b(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$
$$= \frac{x(a-b)+a+b}{1-x^2}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$a-b=0$$
$$a+b=1$$

Ce système nous donne $a = b = \frac{1}{2}$

d) On obtient ainsi que :

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi'(0)}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

On sait de plus que $\varphi(0) = 1$ et que φ ne s'annule par sur I. Par continuité, $\varphi(x) > 0$

En intégrant l'égalité précédente :

$$\ln(\varphi(x)) = \frac{\varphi'(0)}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$$
$$\ln(\varphi(x)) = \frac{\varphi'(0)}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Posons : $\frac{\varphi'(0)}{2} = \alpha$

$$\ln(\varphi(x)) = \alpha \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\ln(\varphi(x)) = \ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}\right)$$

Puis :

$$\varphi(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}$$

4. D'après la partie analyse, si une fonction f est solution du problème alors $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}$ avec α constante.
5. Réciproquement, si $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}$ alors f n'est pas identiquement nulle et

$$f(x)f(y) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} \times \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{\alpha} = \left(\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}\right)^{\alpha}$$
$$= \left(\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}\right)^{\alpha}$$

Et

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \left(\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}\right)^{\alpha}$$

$$= \left(\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}\right)^{\alpha}$$

Autrement dit :

$$f(x)f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

f vérifie bien l'équation fonctionnelle.

Conclusion : Les solutions cherchées sont les fonctions :

$$x \mapsto \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}$$

La recherche de primitives n'est pas toujours évidente à mettre en œuvre. Il est parfois nécessaire de « travailler » l'expression de f' pour la mener à bien. Dans l'exercice précédent par exemple, la question 3c) utilise une technique dite de décomposition en éléments simples pour réussir à déterminer l'expression de la primitive recherchée.

D'autres méthodes existent, tel que le calcul intégral.

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit F est une primitive quelconque de f sur I et a et b deux réel de l'intervalle I. On appelle intégrale de a à b de f le réel défini par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque : Le calcul de l'intégral par cette méthode est indépendant de la primitive choisie.

Exemples : Calculer :

1. $\int_{-1}^{2} x^3\,dx$ 2. $\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx$ 3. $\int_e^{e^2} \frac{1}{xln(x)}\,dx$

Solution :

1. $\int_{-1}^{2} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{15}{4}$
2. $\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx$ il faut penser à la décomposition en éléments simples :

$$(4-x^2) = (2+x)(2-x)$$

Cherchons les réels k et ℓ tels que :

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{k}{2+x} + \frac{\ell}{2-x}$$

$$\frac{k}{2+x} + \frac{\ell}{2-x} = \frac{k(2-x)+\ell(2+x)}{4-x^2}$$
$$= \frac{(\ell-k)x + 2(k+\ell)}{4-x^2}$$

On veut donc :

$$1 = (\ell-k)x + 2(k+l)$$

Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \ell - k = 0 \\ 2(k+\ell) = 1 \end{cases}$$

$$l = k$$

Puis :

$$4k = 1$$

$$k = \frac{1}{4}$$

Les solutions sont $k = \frac{1}{4}$ et $l = \frac{1}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{4 - x^2} dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{4}}{2 + x} + \frac{\frac{1}{4}}{2 - x} dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 \frac{1}{2 + x} dx + \int_0^1 \frac{1}{2 - x} dx\right)$$

$$\frac{1}{4}\left([\ln(2 + x)]_0^1 + [-\ln(2 - x)]_0^1\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\ln(3) - \ln(2) - \ln(1) + \ln(2))$$

$$= \frac{1}{4}\ln(3)$$

3. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)} dx$

   Il suffit de remarquer que $\frac{1}{x\ln(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)} dx = [\ln(\ln(x))]_e^{e^2}$$

$$= \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(e))$$

$$= \ln(2)$$

Il y a différentes propriétés que l'on peut démontrer sur les intégrales. Ici nous allons nous intéresser à l'intégration par parties :

Formule d'intégration par parties :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' sont continues sur I, alors pour tous réels a et b appartenant à I :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\, dx$$

Exercice 32 : On considère la fonction G définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $G(x) = \int_e^x \ln(t)\, dt$

1. Que représente la fonction G pour la fonction logarithme népérien ?
2. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer G

Solution :

1. Il s'agit de la primitive de la fonction $t \mapsto \ln(t)$ qui s'annule en e
2. Il suffit de remarquer que :

$$G(x) = \int_e^x 1 \times \ln(t)\, dt$$

   Utilisons la formule d'intégrations par parties, en prenant :

$$u'(t) = 1 \qquad et \quad v(t) = \ln(t)$$
$$u(t) = t \qquad\qquad v'(t) = \frac{1}{t}$$
$$G(x) = \; [tln(t)]_e^x - \int_e^x t \times \frac{1}{t}\; dt$$
$$G(x) = \; xln(x) - eln(e) - \int_e^x 1\; dt$$
$$G(x) = xln(x) - e - [t]_e^x$$
$$G(x) = xln(x) - e - x + e$$
$$G(x) = xln(x) - x$$

<u>Exercice 33 :</u> En utilisant la même méthode qu'à l'exercice précédent, déterminer la primitive qui s'annule en 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^x$

<u>Solution :</u>

La primitive de f qui s'annule en 1 est :

$$F(x) = \int_1^x t^2e^t\, dt$$

Utilisons la formule d'intégrations par parties, en prenant :

$$u(t) = t^2 \qquad et \quad v'(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{t}}$$
$$u'(t) = 2t \qquad\qquad v(t) = e^t$$
$$F(x) = \; [t^2e^t]_1^x - \int_1^x 2te^t\; dt$$
$$F(x) = x^2e^x - e - 2\int_1^x te^t\; dt$$

Pour calculer $\int_1^x 2te^t\; dt$ on peut à nouveau utiliser une intégration par parties :

$$u(t) = t \qquad v'(t) = e^t$$

$$u'(t) = 1 \qquad\quad v(t) = e^t$$

$$\int_1^x te^t\; dt = [te^t]_1^x - \int_1^x e^t\; dt$$

$$= xe^x - e - [e^t]_1^x$$

$$= xe^x - e - e^x + e$$

$$= xe^x - e^x$$

Il vient alors :

$$F(x) = x^2e^x - e - 2xe^x + 2e^x$$

$$F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x - e$$

<u>Exercice 34 :</u> Déterminer la primitive qui s'annule en 1 de la fonction définie sur $]-1;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$

<u>Solution :</u> La primitive de f qui s'annule en 1 est :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$$

Utilisons la formule d'intégrations par parties, en prenant :

$$u'(t) = \frac{1}{t^2} \qquad et \quad v(t) = \ln(1+\mathrm{t})$$

$$u(t) = -\frac{1}{t} \qquad\qquad v'(t) = \frac{1}{1+t}$$

$$F(x) = \ [-\frac{\ln(1+t)}{t}]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t)}\ dt$$

$$F(x) = \ -\frac{\ln(1+x)}{x} + \ln(2) + \int_1^x \frac{1}{t(1+t)}\ dt$$

Pour déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t(1+t)}$ on va utiliser une décomposition en éléments simples :

Cherchons k et ℓ vérifiant :

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{k}{t} + \frac{\ell}{1+t}$$

$$= \frac{k(1+t) + \ell t}{t(1+t)}$$

$$= \frac{(k+\ell)t + k}{t(1+t)}$$

Il vient :

$$k + \ell = 0$$

$$k = 1$$

$$l = -1$$

$$\int_1^x \frac{1}{t(1+t)}\ dt \ = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt - \int_1^x \frac{1}{1+t}\ dt$$

$$= [\ln(t)]_1^x - [\ln(1+t)]_1^x$$

$$= \ln(x) - \ln(1+x) + \ln(2)$$

On a donc :

$$F(x) = -\frac{\ln(1+x)}{x} + \ln(2) + \ln(x) - \ln(1+x) + \ln(2)$$

$$F(x) = -\frac{\ln(1+x)}{x} + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + 2\ln(2)$$

Exercice 35 : Extrait du concours général

On appelle fonction de type T_0 les fonctions « trinômes » sur [−1 ; 1] définies par :

$$t(x) = ax^2 + bx + c$$

a, b et c étant des réels quelconques.

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle fonction de type T_n les fonctions de la forme $f + \lambda|g|$, λ étant un réel quelconque et f et g étant des fonctions quelconques de type T_{n-1}.

1. Etablir que la fonction φ définie par $\varphi(x) = 0$ pour tout x de [−1 ; 0] et $\varphi(x) = x$ pour tout x de [0 ; 1] est de type T_1.
2. Soit P un trinôme défini sur [−1 ; 1] tel que $P(0) = 0$.
   a. Montrer qu'il existe un réel k positif ou nul tel que pour tout x de [−1 ; 1],
   $$|P(x)| \leq k|x|.$$
   b. Que vaut $\psi(x) = |P(x) + kx| - |kx|$ suivant le signe de x ?
3. On considère deux trinômes t_1 et t_2 tels que $t_1(0) = t_2(0)$ et on définit la fonction f sur [−1 ; 1] telle que :
   Pour tout réel x de [−1 ; 0], $f(x) = t_1(x)$ et pour tout réel x de [0 ; 1], $f(x) = t_2(x)$.
   Démontrer qu'il existe un entier N tel que f soit de type T_N.

Solution

1. En prenant pour $x \in [-1; 1]$ $t_1(x) = \frac{x}{2}$ et $t_2(x) = \frac{x}{2}$ on vérifie que $\varphi(x) = t_1(x) + |t_2(x)|$
   Et les fonctions t_1 *et* t_2 sont des trinômes donc de type T_0 , ainsi φ est de type T_1
2. Ecrivons que $P(x) = ax^2 + bx + c$. Comme $P(0) = 0$ il vient que $c = 0$
   Ainsi $P(x) = ax^2 + bx$
   $$P(x) = x(ax + b)$$
   $$|P(x)| = |x| \times |ax + b|$$
   D'après l'inégalité triangulaire :
   $$|ax + b| \leq |x|(|a||x| + |b|)$$
   Or $x \in [-1; 1]$ donc $|x| \leq 1$ et ainsi $|a||x| + |b| \leq |a| + |b|$
   En prenant $k = |a| + |b|$ on a bien montré que :
   $$|P(x)| \leq k|x|$$
   b. **Si $x \geq 0$** alors $|x| = x$ et l'inégalité précédente nous permet de dire que :
   $$-kx \leq P(x) \leq kx$$
   $$Soit\ P(x) + kx \geq 0$$
   Ainsi :
   $$\boldsymbol{\psi(x) = P(x) + kx - kx = P(x)}$$
   Si $x < 0$ alors $|x| = -x$ et l'inégalité précédente nous permet de dire que :
   $$kx \leq P(x) \leq -kx$$
   $$Soit\ P(x) + kx \leq 0$$
   Ainsi :
   $$\boldsymbol{\psi(x) = -P(x) - kx + kx = -P(x)}$$

3. Considérons $P(x) = \frac{t_2(x) - t_1(x)}{2}$ P est un trinôme vérifiant $P(0) = 0$
   Soit k le réel définie dans la question 2a) et considérons $\psi(x) = |P(x) + kx| - |kx|$
   Si $x \in [0; 1]$ on a vu que $\psi(x) = P(x)$
   Or d'après la défintion des trinômes t_1 et t_2 $P(x) = \frac{f(x) - t_1(x)}{2}$
   Et
   $$\frac{t_1(x) + t_2(x)}{2} + \psi(x) = \frac{t_1(x) + f(x)}{2} + \frac{f(x) - t_1(x)}{2} = f(x)$$
   Si $x \in [-1; 0]$ on a vu que $\psi(x) = -P(x)$

Or d'après la défintion des trinômes t_1 et t_2 $P(x) = \frac{t_2(x)-f(x)}{2}$
Et
$$\frac{t_1(x)+t_2(x)}{2} + \psi(x) = \frac{f(x)+t_2(x)}{2} - \frac{t_2(x)-f(x)}{2} = f(x)$$
Ainsi pour tout $x \in [-1;1]$:
$$f(x) = \frac{t_1(x)+t_2(x)}{2} + \psi(x)$$
$$f(x) = \frac{t_1(x)+t_2(x)}{2} + |P(x)+kx| - |kx|$$
La fonction : $x \mapsto \frac{t_1(x)+t_2(x)}{2} - |kx|$ est de type T_1
La fonction : $x \mapsto P(x)+kx$ est de type T_0 et également de type T_1 car $P(x)+kx = P(x)+kx+|0|$
Ainsi f est de type T_2.

Exercice 36 : Extrait du concours général (2019)

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $[0,+\infty[$.

Pour f et g dans $\mathscr{P}$, on définit la fonction $h = f \circ g$ en posant, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,
$$h(x) = f\left(g(x)\right).$$

Si, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant g(x)$, on note $f \geqslant g$.

On note u et v les fonctions de $\mathscr{P}$ définies, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par
$$u(x) = e^x - 1 \text{ et } v(x) = \ln(x+1).$$

La fonction f est une *fonction polynomiale* si f est nulle ou s'il existe un entier $d \geqslant 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ avec $a_d \neq 0$ tels que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,
$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$
Les nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ sont alors appelés coefficients de la fonction polynomiale f.

Si $\mathscr{S}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$, on définit les propriétés :

(P1) $\mathscr{S}$ contient u et v.

(P2) $\mathscr{S}$ contient toutes les fonctions constantes positives.

(P3) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f+g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P4) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f \circ g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P5) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$ avec $f \geqslant g$, alors $f - g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P6) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f \times g$ est dans $\mathscr{S}$.

1) Soit $\mathscr{T}$ un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P3)**, **(P4)**, **(P5)** et **(P6)**.
   a) Soit ℓ la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par $\ell(x) = x$. Démontrer que la fonction ℓ est dans $\mathscr{T}$.
   b) Déterminer toutes les fonctions affines qui sont dans $\mathscr{T}$.
   c) Soit p la fonction polynomiale définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Démontrer que la fonction p est dans $\mathscr{T}$.
   d) Une fonction polynomiale de $\mathscr{P}$ est-elle toujours dans $\mathscr{T}$?

Correction

1a) D'après la propriété $(P1)$ les fonctions u et v sont dans $\mathcal{T}$ et d'après la propriété $(P4)$ la composée de ces deux fonctions est également dans $\mathcal{T}$. Or pour $x \geq 0$
$$v \circ u(x) = \ln(e^x - 1 + 1) = \ln(e^x) = x$$
Donc la fonction ℓ est également dans $\mathcal{T}$

b)On sait déjà que la fonction identité est dans $\mathcal{T}$ et d'après $(P2)$ $\mathcal{T}$ contient toutes les fonctions constantes positives. Ainsi d'après (P6) $\mathcal{T}$ contient toutes les fonctions $x \mapsto ax$ avec a positif
D'après $(P3)$ toute somme d'une fonction de $\mathcal{T}$ avec une constante positive est dans $\mathcal{T}$
Ainsi $\mathcal{T}$ contient toutes les fonctions $x \mapsto ax + b$ avec a et b positifs appartiennent à $\mathcal{T}$.
Réciproquement : si $f(x) = ax + b$

- Si $a < 0$ alors f est négative sur $]-\frac{b}{a}\ ;\ +\infty[$ donc n'est pas à valeurs dans $[0\,;+\infty[$ cette fonction n'est pas dans $\mathcal{P}$ donc elle n'est pas dans $\mathcal{T}$.
- Si $a = 0$ et $b < 0$ alors f est constante et négative, elle n'est pas dans $\mathcal{T}$
- Si $a > 0$ et $b < 0$ alors $f(0) < 0$ donc f n'est pas dans $\mathcal{T}$

Conclusion : les seules fonctions affines qui sont dans $\mathcal{T}$ sont celles dont les coefficients sont positifs.

c) Commençons par remarquer que ce polynôme du second degré s'écrit sous forme canonique : $x^2 - 3x + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ et admet donc pour minimum $(\frac{3}{2}\,;\frac{7}{4})$ ainsi $x^2 - 3x + 4 > 0$ cette fonction est bien à valeurs dans $[0\,;+\infty[$.
On a démontré en $1)a)$ que la fonction identité l est dans $\mathcal{T}$ et d'après la propriété $(P6)$ toutes les fonctions $l \times l \times \ldots . \times l$ le sont également. Ainsi $x \mapsto x^n$ est dans $\mathcal{T}$car elle est le produit de n fois la fonction identité. De plus, d'après la propriété $(P2)$, $\mathcal{T}$ contient toutes les fonctions $x \mapsto ax^n$ où a est une constante positive. Ainsi la fonction $x \mapsto 2x^2$ est dans $\mathcal{T}$. Comme 4 est une constante positive, d'après la propriété $(P3)$: $f\colon x \mapsto 2x^2 + 4$ est dans $\mathcal{T}$.
D'après la question précédente, la fonction linéaire $g\colon x \mapsto 3x$ étant à coefficient positif elle est dans $\mathcal{T}$.
Il nous reste à utiliser la propriété $(P5)$, il faut pour cela montrer que $f(x) \geq g(x)$
Or $f(x) - g(x) = 2x^2 - 3x + 4$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = -23 < 0$ donc toujours positif.
Ainsi $f(x) \geq g(x)$ et d'après $(P5)$ $f - g$ est dans $\mathcal{T}$. Autrement dit, $2x^2 - 3x + 4$ est dans $\mathcal{T}$.

d) Soit f une fonction polynomiale de degré n appartenant à $\mathcal{P}$ Posons pour tout réel $x \geq 0$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0\ ;\ a_n \neq 0$$

Comme la fonction f doit être à valeurs dans $[0\ ;\ +\infty[$, on peut déjà remarquer que :

- Comme $f(0) = a_0$ donc il faut déjà que $a_0 \geq 0$
- Et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si $a_n < 0$ donc il faut également que $a_n > 0$

Si tous les coefficients de f sont positifs alors f est clairement dans $\mathcal{T}$. Car chaque fonction $x \mapsto ax^n$ est dans $\mathcal{T}$ comme on l'a expliqué au début de la question c).

Supposons que f admettent des coefficients négatifs. Posons : I l'ensemble des coefficients positifs de f et J l'ensemble des coefficients négatifs de f.

$$I = \{\, a_i, i \in [\![0;n]\!]\ tels\ que\ a_i \geq 0\}$$

$$J = \left\{\, a_j, j \in [\![0;n]\!]\ tels\ que\ a_j < 0\right\}$$

On a alors :

$$f(x) = \sum_{i \in I} a_i x^i - \sum_{j \in J} -a_j x^j$$

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

$$g(x) = \sum_{i \in I} a_i x^i \quad et\ \ h(x) = \sum_{j \in J} a_j x^j$$

Comme expliqué précédemment les fonctions g et h sont dans $\mathcal{T}$. De plus, $g(x) - h(x) = f(x)$ et comme f est à valeurs dans $[0\,;+\infty[$: $f(x) \geq 0$ donc $g \geq h$ ainsi d'après $(P6)$ $g - h$ est dans $\mathcal{T}$ donc f est dans $\mathcal{T}$.

La fonctions polynômes qui sont dans $\mathcal{P}$ sont également dans $\mathcal{T}$.