

## I. Généralités sur les fonctions

Une fonction  $f$  décrit une relation entre un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée, que l'on note ainsi :

$$f : I \rightarrow J$$
$$x \mapsto f(x)$$

Dans la plupart des exemples rencontrés au lycée, on dispose de formules arithmétiques simples permettant de calculer l'image d'un nombre. Par exemple :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 3x^2 + 4x - 1$$

Il peut aussi arriver que l'on ne dispose pas de formule simple pour décrire l'image d'un réel par une fonction. On se contentera alors de noter cette image  $f(x)$ .

La notion clé à retenir pour une fonction est l'unicité de l'image : A tout nombre de l'ensemble de départ  $I$ , on associe un unique nombre de l'ensemble d'arrivée  $J$

En revanche, un nombre peut avoir plusieurs antécédents : un élément de l'ensemble d'arrivée  $J$  peut être l'image de plusieurs éléments de l'ensemble de départ  $I$ . Prenons l'exemple de la fonction  $f(x) = x^2$ . On sait que 4 est l'image de 2 et de  $-2$ .

De plus, il n'est pas non plus nécessaire que chaque élément de l'ensemble d'arrivée  $J$  soit l'image d'un élément de l'ensemble de départ. Si on reprend notre exemple de référence avec la fonction carré, on peut la décrire comme une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Tous les réels ont bien une unique image par cette fonction. En revanche, les réels négatifs, ne sont l'image d'aucun réel par cette fonction.

**Définition :** La fonction identité notée  $id$  est la fonction définie par :  $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x$$

**Définition :** Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est dite injective si tout réel  $y \in Y$  admet au plus un antécédent dans  $X$ . Dans la pratique cela signifie que si  $f(a) = f(b)$  alors  $a = b$ .

**Exemples :** La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$  est-elle injective ?

La fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  est-elle injective ?

**Définition :** Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est dite surjective si tout réel  $y \in Y$  admet au moins un antécédent dans  $X$ .

**Exemples :** La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$  est-elle surjective ?

La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $f(x) = x^2$  est-elle surjective ?

La fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  est-elle surjective ?

**Définition :**

Une fonction  $f: X \rightarrow Y$  est dite bijective si elle est surjective et injective. C'est-à-dire que pour tout réel  $y \in Y$ , il existe un unique  $x \in X$  tel que  $y = f(x)$ . Tout réel de l'ensemble  $Y$  admet un unique antécédent dans  $X$ .

**Exemples :** La fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $f(x) = x^2$  est-elle bijective ?

**Définition :**

On considère une fonction  $f: X \rightarrow Y$  bijective. On définit alors la fonction réciproque de  $f$  notée  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  qui à tout réel  $y \in Y$  associe l'unique élément  $x \in X$  vérifiant  $y = f(x)$  ( $x$  est l'unique antécédent de  $y$  par  $f$ ). On a donc  $f^{-1}(y) = x$ .

**Exemple :** Si on considère la fonction  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $f(x) = x^2$ . Expliquez pourquoi cette fonction admet une réciproque et explicitez  $f^{-1}$ .

**Définition :**

Soit  $f: X \rightarrow Y$  une fonction et  $I$  une partie de  $X$ .

La fonction  $f$  est dite croissante (respectivement strictement croissante) si pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a \leq b$  (resp.  $a < b$ ) alors  $f(a) \leq f(b)$  (resp.  $f(a) < f(b)$ ).

La fonction  $f$  est dite décroissante (respectivement strictement décroissante) si pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a \geq b$  (resp.  $a > b$ ) alors  $f(a) \geq f(b)$  (resp.  $f(a) > f(b)$ ).

La fonction  $f$  est dite monotone sur  $I$  si elle est croissante sur  $I$  ou décroissante sur  $I$ .

On définit de la même manière la stricte monotonie sur  $I$ .

En résumé, une fonction croissante conserve l'ordre et une fonction décroissante inverse l'ordre.

**Exercice 1 :** Soit  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  strictement monotone sur  $X$ . Prouver que  $f$  est injective sur  $X$ .

**Exercice 2 :** Prouver que si  $f: X \rightarrow Y$  est une bijection strictement croissante. Alors  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  est également strictement croissante.

**Notation :**

Soit  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: I \rightarrow J$  deux fonctions vérifiant pour tout  $x \in I: g(x) \in X$ .

La fonction composée de  $g$  par  $f$  est notée  $f \circ g$  se lit «  $f$  rond  $g$  » est définie pour tout  $x \in I$  par :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Il s'agit de la composée de  $g$  suivie de  $f$  : il faut d'abord calculer  $g(x)$  puis l'image de  $g(x)$  par la fonction  $f$ .

**Exemple :** On considère  $f(x) = x^2 - 2$  et  $g(x) = 3x + 1$ . Après avoir donné l'ensemble de définition de  $f \circ g$  explicitez  $f \circ g(x)$ . Même question avec  $g \circ f$

**Exemple :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bijective. Déterminer  $f^{-1} \circ f$  puis  $f \circ f^{-1}$

**Théorème :**

Soit  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: I \rightarrow J$  deux fonctions vérifiant pour tout  $x \in I: g(x) \in X$ .

- Si  $f$  et  $g$  sont croissantes alors  $f \circ g$  est croissante.
- Si  $f$  et  $g$  sont décroissantes alors  $f \circ g$  est croissante.
- Si  $f$  est décroissante et  $g$  croissante alors  $f \circ g$  est décroissante
- Si  $f$  est croissante et  $g$  décroissante alors  $f \circ g$  est décroissante

**Exercice 3 :** En décomposant la fonction  $h(x) = |x - 3|$  en fonctions de référence, étudier ses variations.

**Définition :**

Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction . La fonction  $f$  est dite :

- paire si pour tout  $x \in X$ , on a  $-x \in X$  et  $f(-x) = f(x)$
- impaire si pour tout  $x \in X$ , on a  $-x \in X$  et  $f(-x) = -f(x)$

**Exemple :** La fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est-elle paire ?

$$n \mapsto n^2$$

La fonction  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  est-elle paire ?

$$n \mapsto n^2$$

**Définition :**

$f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a$  est un nombre réel de  $I$ .

- Dire que que  $f$  est **continue en  $a$**  signifie que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- Dire que que  **$f$  est continue sur l'intervalle  $I$**  signifie que  **$f$  est continue en tout réel  $a$  de  $I$ .**

**Remarque :** On a également comme définition équivalente :

$f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$

**Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit  $f$  une fonction **continue sur un intervalle**  $[a ; b]$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe **au moins un** réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = k$

**Exercice 4 :** Si  $f$  est continue sur  $[0 ; 1]$  à valeurs dans  $[0 ; 1]$  montrer que  $f(x) = x$  a au moins une solution

**Exercice 5 :**

1. On considère la fonction exponentielle, démontrer que cette fonction réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$
2. La réciproque de cette fonction est la fonction logarithme népérien notée  $\ln$ .
  - a) Déterminer  $\ln(1)$ .
  - b) Démontrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  strictement positifs,  $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
  - c) En déduire une formule pour  $\ln\left(\frac{1}{b}\right)$  puis  $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

**Exercice 6 : Extrait du concours général de 2005 :** Soit  $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ . On suppose que  $f(0) = f(1) = 0$  et que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; \frac{7}{10}] : f\left(x + \frac{3}{10}\right) \neq f(x)$ .

1. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  a au moins sept solutions sur  $[0 ; 1]$ .
2. Donner une fonction  $f$  vérifiant les hypothèses, on pourra se contenter d'une représentation graphique claire.

## II. Equations fonctionnelles

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction.

**Exercice 7 :** Déterminer toutes les fonctions continues de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $f \times f = f$ . C'est-à-dire telles que pour tous réels  $x$  et  $y$  :  $f(x) \times f(x) = f(x)$ .

### Bilan : Résoudre des équations fonctionnelles.

Pour résoudre une équation fonctionnelle, on utilise souvent le raisonnement appelé Analyse/synthèse.

- Analyse : on essaie de collecter des informations sur la fonction : valeur particulière (peut-on trouver  $f(0)$  ?) valeur en laquelle elle s'annule, ... Puis on essaie de trouver la solution ou plutôt une famille de solutions.
- Synthèse : on vérifie ensuite que la (ou les) solution(s) trouvée(s) réponde(nt) bien au problème donné.

La partie Analyse n'est pas toujours évidente à mettre en place, car on ne dispose pas vraiment d'une méthode générale. En pratiquant, on va constater des procédés de raisonnement qui vont se répéter :

- On teste si des fonctions « évidentes » répondent au problème : fonction constante, identité ou fonction polynôme.
- Peut-on déterminer  $f(0)$  ou  $f(1)$  ? si non, on leur attribuera une valeur et on avance dans le procédé.
- Il peut être aussi intéressant d'étudier la parité de la fonction. Montrer qu'elle est paire ou impaire permet de ne l'étudier ensuite que sur  $\mathbb{R}^+$
- Lorsque plusieurs paramètres interviennent,  $x$  et  $y$ , est-ce que fixer la valeur 0 à l'un des deux permet de donner des renseignements intéressants sur la fonction ?

**Exercice 8 :** Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que pour tous réels  $x$  et  $y$  :

$$f(x + y) = f(x) - f(y)$$

**Exercice 9 :** Déterminer toutes les fonctions strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f \circ f = id$ . Où  $id$  désigne la fonction identité :  $id : x \mapsto x$ .

**Exercice 10 :** Déterminer toutes les fonctions de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues en 0 et vérifiant pour tous réels  $x$  et  $y$  :  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ .

1. Donner des solutions particulières de cette équation fonctionnelle.
2. Si  $f$  est solution de cette équation fonctionnelle. Déterminer  $f(0)$ .
3. Démontrer qu'une fonction  $f$  vérifiant l'équation fonctionnelle est impaire.
4. Si  $f$  est solution de cette équation fonctionnelle montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  
(Indication : Montrer que  $f$  est continue en  $a$  revient à montrer que  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \dots$ )
5. Si  $n$  est un entier naturel, démontrer par récurrence une formule donnant  $f(n)$  en fonction de  $f(1)$
6. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si  $n$  est un entier relatif
7. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si  $r$  est un rationnel.
8. Montrer que cette égalité est encore vérifiée si  $x$  est un réel.  
On admettra la propriété suivante : « Pour tout réel  $x$ , il existe une suite  $(x_n)$  de rationnels (des développements décimaux par exemple) qui converge vers  $x$  »
9. Conclure

**Exercice 11 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue en 0 et en 1 telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$$

Montrer que  $f$  est constante.

Indications :

- Commencer par étudier la parité de  $f$ .
- Pour tout  $x > 0$ , remarquer  $(x^{\frac{1}{2^n}})$  converge vers 1 et utiliser la continuité de  $f$  en 1.

**Exercice 12 :** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

a) On suppose que  $f(0) = 0$ . Vérifier que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Donner alors la forme de la fonction  $f$

b) On revient au cas général. Déterminer  $f$ .

**Exercice 13 :** Déterminer toutes les fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

### III. Dérivation et équation fonctionnelle

#### Définition

Une fonction est dérivable en  $a$  si son taux d'accroissement en  $a$ ,  $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ , admet une limite finie quand  $x$  tend vers  $a$ . On définit alors  $f'(a)$  par :  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

**Exercice 14 :** Démontrer qu'une fonction dérivable en  $a$  est continue en  $a$ .

Que penser de la réciproque ?

**Exercice 15 :** La fonction  $f(x) = \sqrt{3x-4}$  est-elle dérivable en  $\frac{4}{3}$  ?

**Exercice 16 :** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$  et  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-5x-4}{x+1}$

#### Théorème :

Soit  $v: I \rightarrow J$  une fonction définie et dérivable sur  $I$  et  $u: K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie et dérivable sur  $K$  avec  $J \subset K$

La fonction  $u \circ v$  est dérivable sur  $I$  et :  $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$ . C'est-à-dire :

$$\forall x \in I, (u \circ v)'(x) = v'(x)u'(v(x))$$

**Exemple :** Déterminer la dérivée de la fonction :  $f(x) = (4x^2 + 3)^{10}$

**Exercice 17 :** Démontrer que  $\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$

**Exercice 18 :** Soient  $a, b$  et  $x$  trois réels strictement positifs avec  $a < b$ .

Démontrer l'inégalité :  $0 < be^{-ax} - ae^{-bx} < b - a$

**Exercice 19 :** Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation  $\ln(x) = kx^2$  où  $k$  est un réel.

Indications : On donne le résultat suivant :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$  (Croissances comparées)

**Exercice 20 :** On considère une fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Déterminer la dérivée de la fonction :

$$g: x \mapsto f(xy)$$

**Exercice 21 :** Revenons sur l'équation fonctionnelle de Cauchy : Déterminer les solutions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables et vérifiant  $f(x + y) = f(x) + f(y)$

**Exercice 22 :** On cherche les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et qui vérifient l'équation fonctionnelle :

$$f(x + y) = f(x) \times f(y), \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}$$

1. Chercher des solutions particulières :
  - a) Déterminer quelles sont les fonctions constantes solutions de cette équation fonctionnelle.
  - b) Montrer que les fonctions de la forme  $f(x) = e^{ax}$ , où  $a$  est un réel, sont solutions de cette équation fonctionnelle.
2. On suppose que  $f$  est une solution de cette équation fonctionnelle et que  $f$  n'est pas identiquement nulle.
  - a) Déterminer  $f(0)$
  - b) Montrer que  $f(x) \geq 0$  (Indications : pensez que  $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \dots$ )
  - c) En déduire que  $f(x) > 0$
3. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$
4. Justifier que la fonction  $g(x) = \ln(f(x))$  est bien définie et montrer que  $g$  vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy. En déduire l'expression de  $f$
5. Conclure

**Exercice 23 : extrait du concours général de 2009**

Le but de l'exercice est la recherche des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbf{R}$ , à valeurs dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , vérifiant pour tout réel  $x$  la relation  $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$ , telles que  $f(0) = 1$  et que  $\frac{1-f(x)}{x^2}$  admette une limite lorsque  $x$  tend vers 0, que l'on notera  $a$ .

On rappelle que tout  $x$  de  $[-1, 1]$  s'écrit de façon unique  $x = \cos(\theta)$  avec  $\theta$  dans  $[0, \pi]$ .

1. (a) Vérifier  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$ . (On pourra utiliser une formule donnant  $\cos(2\alpha)$ ).  
(b) Montrer, pour  $\theta$  dans  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , les relations :  $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta)$  et  $\cos(\theta) \leq 1 - \frac{\theta^2}{\pi}$ .
2. Soit  $f$  une fonction solution du problème On se donne un réel  $x$  et l'on pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n)$ , avec  $\theta_n$  dans  $[0, \pi]$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est continue en 0 et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$ .

**Indications :**

1)a) :  $\cos(2\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$ . On pourra utiliser que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

2a) Commencer par déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\theta_n)$  et en déduire un intervalle auquel appartient alors  $\theta_n$

**Exercice 24 : Extrait du concours général de 2008**

On munit le plan affine euclidien  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $S$  la courbe d'équation

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}.$$

1. Quelle est la nature géométrique de  $S$  ?
2. Pour tout couple  $(u, v)$  de nombre réels on note  $U$  le point de coordonnées  $(u, v)$ , et pour  $x$  dans  $\mathbf{R}$  on note  $M(x)$  le point de  $S$  d'abscisse  $x$ . On pose

$$f_U(x) = UM(x), \quad g_U(x) = [f_U(x)]^2.$$

- (a) Calculer  $g_U, g'_U,$  et  $g''_U$ . Résoudre l'équation  $g''_U(x) = 0$ .
  - (b) Donner le tableau des variations de  $f_U$  (on ne cherchera pas à calculer explicitement le ou les nombres réels où  $f_U$  admet un extremum relatif).
3. On dira qu'un cercle  $C$  de centre  $U$  et de rayon  $UM$  est tangent en  $M$  à  $S$  si  $M$  est un point de  $S$  et si les tangentes en  $M$  à  $C$  et  $S$  coïncident.  
Soit  $U$  un point du plan n'appartenant pas à  $S$ , et soit  $a$  dans  $\mathbf{R}$ . Montrer que le cercle de centre  $U$  et de rayon  $UM(a)$  est tangent en  $M(a)$  à  $S$  si et seulement si  $g'_U(a) = 0$ .
  4. (a) Montrer que tout point n'appartenant pas à  $S$  est centre d'au moins un et d'au plus 3 cercles tangents à  $S$ .  
(b) Pour  $U$  n'appartenant pas à  $S$ , on note  $n(U)$  le nombre de réels  $x$  pour lesquels le cercle de centre  $U$  et de rayon  $UM(x)$  est tangent en  $M(x)$  à  $S$ . Pour  $1 \leq i \leq 3$ , caractériser par une égalité ou une inégalité simple l'ensemble des points  $U$  n'appartenant pas à  $S$  tels que  $n(U) = i$ . On pourra être amené à discuter selon le signe de  $81u^2 - 16v^3$ .  
Faire un croquis représentant  $S$  et les ensembles trouvés.

Indications :

2 b) : Penser que  $f(x) = \sqrt{g(x)}$  et en déduire que les variations de  $f$  dépendent de celles de  $g$ .

Etudier les variations de  $g'$  grâce au signe de  $g''$  en distinguant les cas selon lesquels  $g''(x) = 0$  a deux solutions, une seule ou aucune.

A partir de variations de  $g'$ , déterminer son signe.

Dans le cas où il y a deux solutions, il faudra déterminer les signes de  $g'(-\sqrt{v})$  et  $g'(\sqrt{v})$ . Pour savoir s'ils ont le même signe, calculer  $g'(-\sqrt{v}) \times g'(\sqrt{v})$  et distinguer les différents cas possibles. (Il y aura 4 cas à envisager : de même signe, l'un d'eux est nul ou de signes contraires)

Une fois le signe de  $g'$  obtenu, en déduire les variations de  $g$  puis de  $f$  dans chaque cas considéré.

3) Déterminer le coefficient directeur de la tangente en  $M(a)$  à  $S$  et en déduire un vecteur directeur. Déterminer un vecteur normal de la tangente à  $C$  en  $M(a)$ . Traduire l'orthogonalité des 2 vecteurs à l'aide du produit scalaire.

4) Quelle est la nature de  $g'$  ? Combien de racines peut-elle avoir au maximum ?