Eléments sur les suites

Nous étudierons ici les suites à valeurs dans $\mathbf{R}$, définies à partir d'un certain rang p. Sans précision particulière, les suites sont supposées définies à partir du rang $n = 0$. Dans le cas contraire, il suffit d'adapter les résultats à la suite (u_{n+p}).

I - Quelques définitions

1) Limite finie

Soit une suite u et un réel l.

On dit que (u_n) tend vers l quand n tend vers $+\infty$ ou que la suite u converge vers le réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un rang N, c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N, \quad l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$$

.
On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

Lorsqu'elle existe, la limite l est unique. .

2) Limite infinie

On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle du type $[A; +\infty[$ (où A est un réel quelconque) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un rang N, c'est-à-dire :

$$\forall A \quad \exists N \quad \forall n \geq N, u_n \geq A$$

On écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Remarques :

1. En remplaçant l'intervalle $[A; +\infty[$ par un intervalle du type $]-\infty; B]$, on obtient une suite dont la limite est $-\infty$.
2. Une suite qui n'a pas de limite finie ou qui a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) est dite divergente.

3) Majorant et minorant

Un réel M est un majorant d'une suite (u_n) ssi

$$\forall n \geq 0, u_n \leq M$$

Un réel m est un minorant d'une suite (u_n) ssi

$$\forall n \geq 0, u_n \geq m$$

Une suite qui est majorée et minorée est dite bornée.

Remarque : une suite (u_n) est bornée ssi $(|u_n|)$ est majorée.

4) Sens de variation

On dit qu'une suite (u_n) est croissante ssi $\forall n, u_n \leq u_{n+1}$
On dit qu'une suite (u_n) est décroissante ssi $\forall n, u_n \geq u_{n+1}$
On dit qu'une suite (u_n) est monotone ssi elle est croissante ou décroissante.
On dit qu'une suite est stationnaire ssi il existe un réel m tel que $\forall n, u_n = m$.

Remarques

1. Ces définitions peuvent être seulement valables à partir d'un rang p.
2. Lorsque les termes de la suite sont strictement positifs, on peut étudier le sens de variation de la suite en comparant 1 et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
3. Lorsque les inégalités sont strictes, les suites sont dites strictement (dé)croissantes.

Exercice 1
Montrer que si (u_n) est une suite monotone, alors (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = \frac{u_1+u_2+...+u_n}{n}$ est aussi monotone (de même sens de variation que (u_n)).

Exercice 2
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \frac{n!}{n^n}$

II - Limite et comparaison

Proposition 1 *Si une suite a pour limite $+\infty$ alors elle est minorée.*
Si une suite a pour limite $-\infty$ alors elle est majorée.

Proposition 2 *Toute suite convergente est bornée.*

La réciproque est fausse.
Par exemple, $u_n = (-1)^n$, $v_n = cos(\frac{n\pi}{2})$ sont bornées mais n'ont pas de limite.

Théorème 1 *On considère deux suites u et v, N un entier naturel tel que $\forall n \geq N, u_n \leq v_n$*
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exercice 3
Déterminer la limite de la suite définie par $v_n = ln(n^2+1) + \frac{1}{2}sin(\sqrt{n})$

Proposition 3 *(u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.*
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ *alors* $l \leq l'$

Les inégalités larges sont essentielles. Même si $u_n < v_n$, la conclusion restera $l \leq l'$. Considérer par exemple les suites définies par $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{2}{n}$.

Exercice 4
On admet que la suite définie par $u_n = \frac{2^n}{n!}$ admet une limite l. Déterminer la valeur de cette limite.

Le théorème d'encadrement suivant est connu sous le nom de "théorème des gendarmes", les suites "gendarmes" encadrent la suite "prévenue" qui ne peut échapper à la convergence ...

Théorème 2 *Soient (u_n), (a_n) et (b_n) trois suites telles qu'à partir d'un certain rang p, on ait $a_n \leq u_n \leq b_n$. Si (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite l alors (u_n) est convergente et sa limite est l.*

Remarques :

1. Il est essentiel que les suites (a_n) et (b_n) aient la même limite. Considérer par exemple $a_n = -1$, $b_n = 1$ et $u_n = (-1)^n$.
2. Dans la proposition 3, il faut déjà avoir établi que la suite converge pour conclure. Le théorème des gendarmes assure l'existence de la limite. Ainsi, on pourrait reprendre l'exercice 4 sans avoir à supposer que la limite de la suite existe...
3. Si une suite (u_n) est positive et qu'elle est majorée par une suite de limite nulle alors cette suite (u_n) admet également 0 pour limite

Exercice 5
Étudier la limite éventuelle de la suite de terme général $u_n = n \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$, $n \geq 1$

Théorème 3 *Toute suite croissante et majorée converge.*
Toute suite décroissante et minorée converge.

Remarques :

1. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
2. Une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$

Exercice 6

1. Trouver une suite convergente qui n'est pas monotone.
2. Trouver une suite bornée divergente.
3. Trouver une suite non bornée qui ne tend pas vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Exercice 7
Soit (u_n) la suite de terme général : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Montrer que $\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
2. En déduire que la suite (u_n) converge.
   La valeur de cette limite est $\frac{\pi^2}{6}$. Ce résultat, démontré pour la première fois par Euler, est connu sous le nom du problème de Bale.

Exercice 8
Soit la suite (S_n) de terme général : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *(cette suite est appelée série harmonique)*

1. Montrer que, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$
2. Raisonner par l'absurde et déduire que (S_n) tend vers $+\infty$

Exercice 9
Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n)$$

1. Étudier la monotonie de la suite.
2. Montrer que la suite est minorée par 0.
3. En déduire que la suite est convergente. *Sa limite est la constante d'Euler, notée habituellement γ.*

III - Suites adjacentes

Deux suites réelles (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes lorsque :

1. (a_n) est croissante ;
2. (b_n) est décroissante ;
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$

Théorème 4 *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite l. De plus, cette limite vérifie :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, a_n \leq l \leq b_n$$

Preuve :
Notons (u_n) la suite de terme général $u_n = b_n - a_n$.
Cette suite est décroissante car $u_{n+1} - u_n = (b_{n+1} - b_n) - (a_{n+1} - a_n) \leq 0$. De plus, la limite de cette suite est nulle. On déduit que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq 0$, soit $a_n \leq b_n$.
La monotonie de chaque suite implique alors que $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$.
La suite (a_n) est majorée par b_0 et elle est croissante, par conséquent elle converge vers un réel l tel que $l \geq a_n, \forall n \in \mathbf{N}$.
La suite (b_n) est minorée par a_0 et elle est décroissante, par conséquent elle converge vers un réel l' tel que $l' \leq b_n, \forall n \in \mathbf{N}$.
De plus, $l = l'$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Exercice 10
Reprenons la suite (u_n) définie à l'exercice 9.
Prouver que (u_n) et (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n+1)$ sont adjacentes.

Exercice 11
On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, deux suites (a_n) et (b_n) de terme général :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } b_n = a_n + \frac{1}{nn!}$$

1. Justifier que (a_n) est croissante puis que (b_n) est décroissante.
2. Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$
3. En déduire que les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers un même réel.
   Ce réel est le nombre e, base des logarithmes népériens
4. Montrons que e est un nombre irrationnel. Raisonnons pour cela par l'absurde et supposons que e est un nombre rationnel.

Exercice 12
On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) vérifiant $0 < u_0 < v_0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \qquad et \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Justifier que tous les termes des suites (u_n) et (v_n) sont strictement positifs.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$.
3. En déduire le sens de variation de chacune des deux suites.
4. Montrer que ces deux suites ont la même limite l.
5. Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, $u_n v_n = u_0 v_0$. En déduire que $l = \sqrt{u_0 v_0}$.

IV - Relations de récurrence

1) Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour étudier une suite de ce type, il est souvent utile d'étudier les variations de la fonction f et de déterminer un intervalle I qui contient toutes les valeurs de la suite.

Théorème 5 *Si f est une fonction croissante sur I alors la suite (u_n) est monotone.*
Si $u_0 \leq u_1$ alors la suite (u_n) est croissante. Sinon, elle est décroissante.

Théorème 6 *Si la suite (u_n) est convergente vers l et si f est continue alors l vérifie $l = f(l)$.*

Exercice 13
Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 0,1875$.

2) Suites arithmétiques

On appelle ainsi les suites (u_n) vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = u_n + a$ où a est un réel fixé. On a alors $u_n = u_0 + na$ et on dit que la suite est arithmétique de raison a.

3) Suites géométriques

On appelle ainsi les suites (u_n) vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = qu_n$ où q est un réel fixé.. On a alors $u_n = q^n u_0$ et on dit que la suite est géométrique de raison q.
Si $|q| > 1$, la suite diverge.
Si $|q| < 1$, la suite converge vers zéro.
Si $q = 1$, la suite est constante.

4) Suites définies par une récurrence homographique

On dit qu'une suite (u_n) vérifie une récurrence homographique si elle vérifie une relation de récurrence du type

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = h(u_n)$$

avec

$$h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad ad - bc \neq 0$$

Une telle suite est définie pour tout n si et seulement si aucune de ses valeurs n'annule le dénominateur de h. L'exercice qui suit permet d'exprimer explicitement u_n.

Exercice 14

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $h(x) = x$ (E)
2. On suppose que l'équation (E) possède deux solutions distinctes, on note α et β ces deux solutions.
   (a) Justifier que $\frac{h(x)-\alpha}{h(x)-\beta} = k\frac{x-\alpha}{x-\beta}$ où k est un réel que l'on précisera.
   (b) En déduire que, quel que soit l'entier naturel n, $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = k^n \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$
3. On suppose que l'équation (E) possède une racine double que l'on note α.
   (a) Justifier que $\frac{1}{h(x)-\alpha} = \frac{1}{x-\alpha} + k$
   (b) En déduire que, quel que soit l'entier naturel n, $\frac{1}{u_n-\alpha} = \frac{1}{u_0-\alpha} + kn$ où k est un réel que l'on précisera.

V - Vu au concours général...

Extrait du Problème 1, Sujet 2022

Problème 1 : En pleine effervescence

Pour tout réel $x \geqslant 0$, on note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier naturel inférieur ou égal à x. On a donc $\mathrm{E}(x) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$.

Par exemple, $\mathrm{E}(2,4)=2$, $\mathrm{E}(3)=3$ et $\mathrm{E}(1,9)=1$.

On dit qu'un réel x est *pétillant* si $x \geqslant 0$ et si, pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre $\mathrm{E}\left(x^{(2^n)}\right)+2$ est le carré d'un entier.

Partie 1 : Mise en jambes

1) Démontrer que le réel $\dfrac{3}{2}$ n'est pas pétillant.
2) Démontrer que l'intervalle $[0;1[$ ne contient aucun réel pétillant.
3) a) Démontrer que, si un réel x est pétillant, alors le réel x^2 est aussi pétillant.
   b) Démontrer que, s'il existe un réel pétillant, alors il existe une infinité de réels pétillants.
4) Démontrer qu'aucun entier naturel n'est pétillant.

Dans la suite de ce problème, on considère un entier $k \geqslant 1$ fixé. On souhaite établir que l'intervalle $[k;k+1[$ contient un unique réel pétillant. On note $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$u_1=(k+1)^2$$

et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1}=(u_n-1)^2.$$

Partie 2 : Existence

5) Démontrer que $u_n \geqslant 3$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
6) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un unique réel $a_n \geqslant 1$ tel que $a_n^{(2^n)}+2=u_n$, et un unique réel $b_n \geqslant 1$ tel que $b_n^{(2^n)}+1=u_n$.
7) Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante et que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.
8) Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note α sa limite.
9) Démontrer que $k<\alpha<k+1$ et que α est pétillant.

Quelques indications

4. Considérer les restes d'une division euclidienne par 4 (c'est-à-dire raisonner modulo 4...)
5. Raisonner par récurrence sur n en utilisant les variations de la fonction $f(x)=(x-1)^2$
6. A n fixé, la fonction $g(x)=x^{2^n}$ établit une bijection de $[1;+\infty[$ sur lui-même.
7. Exploiter les relations de récurrence entre a_{n+1} et a_n et établir dans un premier temps que $a_{n+1}^{n+1}-a_n^n$ est positif. De même avec la suite (b_n).
8. Utiliser le théorème 3.
9. Utiliser la propriété 3 et établir que $a_1>k$ et que $b_1<k+1$

PROBLÈME III

Moyennes prévisionnelles

Dans ce problème, on considère des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_1, u_2, \ldots)$ à valeurs réelles indexées par les entiers naturels non nuls. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de type $\mathscr{M}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est la moyenne des n termes suivants, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n-1} + u_{2n}}{n}.$$

1° Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de type $\mathscr{M}$ et C un nombre réel. Que dire de la suite $(u_n - C)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

2° Montrer que toute suite croissante de type $\mathscr{M}$ est constante.

3° Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de type $\mathscr{M}$. On suppose qu'il existe des réels a, b, c tels que $u_n = an^2 + bn + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a = b = 0$.

4° L'objectif de cette question 4° est de montrer que toute suite majorée ou minorée de type $\mathscr{M}$ est constante.

Dans les questions a) et b), on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de type $\mathscr{M}$ à valeurs positives ou nulles, et on considère un entier $r \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit p un entier tel que $p > r$. Montrer qu'il existe des entiers naturels non nuls q et q' tels que $q < p \leqslant q' \leqslant 2q$ et $u_{q'} \leqslant u_q \leqslant u_r$. En déduire que $u_p \leqslant 3u_r$.

Quelques indications

1. La somme comporte n termes
2. Utiliser la définition de u_n et montrer que la croissance de (u_n) implique que $u_{n+1} \leq u_n$
3. Écrire la relation caractérisant les suites de type M aux rangs $n = 1$ et $n = 2$
4. Raisonner par l'absurde.

PROBLÈME I

Stabilité géométrique

Dans tout le problème, ε et q sont deux réels strictement positifs.
On considère une suite (x_n) de réels telle que $x_0 > 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant x_{n+1} - qx_n \leqslant \varepsilon.$$

1° Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = x_{n+1} - qx_n$.
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$x_n = q^n x_0 + q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + \cdots + q b_{n-2} + b_{n-1}.$$

2° Dans cette question, on suppose que $0 < q < 1$.

a) Montrer qu'il existe une suite géométrique (y_n) telle que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$|y_n - x_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{1-q}.$$

b) Montrer qu'il existe en fait une infinité de telles suites géométriques (y_n).

3° Dans cette question, on suppose que $q > 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{b_0}{q} + \dfrac{b_1}{q^2} + \cdots + \dfrac{b_{n-1}}{q^n}$.

a) Montrer que la suite (u_n) converge.

Quelques indications

1. Effectuer des décalages d'indice dans des sommes et simplifier la somme $q^n x_0 + q^{n-1} b_0 + \ldots + q b_{n-2} + b_{n-1}$
2. a. Choisir $y_n = q^n x_0$ et utiliser la formule permettant d'obtenir la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.
b. Il n'est pas nécessaire que $y_0 = x_0$
3. a. Utiliser le théorème 3

Problème 1 : Le début justifie la fin

Dans cet exercice, on considère l'ensemble, noté $\mathscr{S}$, des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs réelles et telles que

$$u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

Pour tout nombre réel x, on note $u(x)$ la suite appartenant à $\mathscr{S}$ et dont le premier terme vaut x. On note également $u_n(x)$ le terme d'indice n de cette suite. Ainsi, $u_0(x) = x$ et $u_1(x) = \exp(x)$.

1) Démontrer que toute suite appartenant à $\mathscr{S}$ est strictement positive à partir du rang 1.
2) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, s'il existe un rang $N \geqslant 2$ pour lequel $u_N \leqslant 1$, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
3) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à $\mathscr{S}$. Démontrer que, si cette suite ne converge pas vers 0, alors elle diverge vers $+\infty$.

Quelques indications

1. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbf{R}$
2. Raisonner par récurrence puis utiliser le théorème 2.
3. Raisonner par contraposée puis utiliser le théorème 1.