Travaux algébriques

1. **Partie entière**

   (a) Notions

   Définition : Pour tout x réel, on note $E(x)$, partie entière de x, l'entier relatif tel que

   $$E(x) \leqslant x < E(x) + 1$$

   .

   Exemple 1
   $E(5,46) = 5$ car $5 \leqslant 5,46 < 6$.
   $E(-8,6) = -9$ car $-9 \leqslant -8,6 < -8$.

   (b) Exercices

   * **Exercice 1**
     Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n non nul,

     $$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$$

   * **Exercice 2**
     Trouver x tel que $x \times E(x \times E(x \times E(x))) = 88$.

   * **Exercice 3** Extrait du sujet du concours général 2022.
     On dit qu'un réel x est *pétillant* si $x \geqslant 0$ et si, pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre $E\left(x^{2n}\right) + 2$ est le carré d'un entier.

     (a) Démontrer que le réel $\frac{3}{2}$ n'est pas pétillant.

     (b) Démontrer que l'intervalle $[0; 1[$ ne contient aucun réel pétillant.

     (c) i. Démontrer que, si un réel x est pétillant, alors x^2 l'est également.

       ii. Démontrer que, s'il existe un réel pétillant, alors il existe une infinité de réels pétillants.

     (d) Démontrer qu'aucun entier naturel n'est pétillant.

2. **Valeur absolue**

   (a) Notions

   Définition : Pour tout réel x, on note $|x|$ la valeur absolue de x telle que :

   $$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 2
$|4| = 4$.
$|-4| = 4$.

Propriété : Soit a un réel positif, alors :

- si $|x| \leqslant a$ alors $-a \leqslant x \leqslant a$.
- si $|x| \geqslant a$ alors $-a \geqslant x$ ou $x \geqslant a$.

Propriété : Pour tous réels a et b :

- $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ (inégalité triangulaire)
- $|a-b| \geqslant |a| - |b|$
- $|ab| = |a||b|$
- Si b est non nul, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
- Pour tout entier naturel n, $|a^n| = |a|^n$
- $\sqrt{a^2} = |a|$

(b) Exercices

∗ **Exercice 4**
Simplifier les fonctions suivantes :
$f(x) = |x^2 - 10x + 21|$
$g(x) = \left|\dfrac{(2x-6)(3x+7)}{x+5}\right|$

∗ **Exercice 5**
Résoudre $|x+5| > |2x-3|$.

∗ **Exercice 6**
Résoudre $|x+2| + |2x+8| = 8$.

∗ **Exercice 7**
Démontrer l'inégalité triangulaire.

3. Inégalités de réordonnement

(a) Notions

Propriété : Inégalité de réordonnement $n = 2$
Soient a, b, c et d des réels tels que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors :

$$ac + bd \geqslant ad + bc$$

Propriété : Inégalité de réordonnement $n = 3$
Soient a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 des réels tels que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$, alors :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

est la somme maximale parmi toutes les sommes de produits de a et b.

(b) Exercices

* **Exercice 8**
Montrer que pour tous réels x et y, $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$.

* **Exercice 9**
Montrer que pour tous réels x, y et z, $x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$.

4. **Inégalités de Chebychev**

(a) Notions

Propriété : Inégalité de Chebychev $n = 2$
Soient a, b, c et d des réels tels que $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors :

$$ac + bd \geqslant \frac{1}{2}(a+b)(a+c)$$

Propriété : Inégalité de Chebychev $n = 3$
Soient a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 des réels tels que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$, alors :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \geqslant \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$$

(b) Exercices

* **Exercice 10**
Montrer que pour tous réels x, y et z,

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}$$

.

5. **Inégalités de la moyenne**

(a) Notions

Propriété : Inégalité de la moyenne $n = 2$
Soient a, b des réels strictement positifs, alors :

$$ab \leqslant \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2$$

Propriété : Inégalité de la moyenne n **quelconque**
Soient a_1, a_2,... ,a_n des réels strictement positifs, alors :

$$a_1 a_2 ... a_n \leqslant \left(\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)\right)^n$$

(b) Exercices

* **Exercice 11**
Montrer que pour tous réels a_1, a_2,...a_n strictement positifs,

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)^n \geqslant \frac{n}{a_1 a_2 ... a_n}$$

.

* **Exercice 12**
Montrer que

$$1 \times 2 \times ... \times n \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

6. **Inégalités de Cauchy-Schwarz**

(a) Notions

Propriété : Inégalité de Cauchy-Schwarz $n = 2$
Soient a, b, c et d des réels, alors :

$$ac + bd \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}$$

Propriété : Inégalité de Cauchy-Schwarz n **quelconque**
Soient a_1, a_2,... ,a_n et b_1, b_2,... ,b_n des réels, alors :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

7. **Inégalités triangulaires**

(a) Notions

Propriété : Inégalité triangulaire $n = 1$
Soient a, b des réels, alors :

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqslant \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$$

Propriété : Inégalité de Cauchy-Schwarz n quelconque
Soient a_1, a_2,... ,a_n et b_1, b_2,... ,b_n des réels, alors :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k}$$

8. **Exercices sur les inégalités**

* **Exercice 13**
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est convexe sur I si pour tous x et y de I et pour tout λ de $[0,1]$,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

(a) Montrer que la fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$.

(b) Soient α, β et γ, trois réels positifs ou nuls tels que $\alpha+\beta+\gamma=1$. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.
Montrer que, pour tous x, y et z de I,

$$f(\alpha x+\beta y+\gamma z) \leqslant \alpha f(x)+\beta f(y)+\gamma f(z)$$

(c) Soient x, y et z des réels, montrer que :

$$3(x^2+y^2+z^2) \geqslant (x+y+z)^2$$

* **Exercice 14**
Soient a, b et c trois réels compris entre 0 et 1 tels que $a+b+c=1$. On note $p=1-6abc$.

(a) Montrer que $p \geqslant \dfrac{7}{9}$.

(b) On suppose que $0<c<b<a<1$.
Montrer que $a>\dfrac{1}{3}$, $c<\dfrac{1}{3}$ et $b<\dfrac{1}{2}$.

(c) On pose $X=\dfrac{a^2(3-2a)}{p}$, $Y=\dfrac{b^2(3-2b)}{p}$ et $Z=\dfrac{c^2(3-2c)}{p}$.
Montrer que $0<Z<Y<X$.

(d) Montrer que $X - Y > a - b$ et que $X - Z > a - c$.

9. **Exercices sur les fonctions affines par morceaux**

* **Exercice 15**

  Soit f une fonction définie et continue sur $[0;1]$.

  On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que pour tout x de $\left[0;\dfrac{7}{10}\right]$, $f(x + \dfrac{3}{10} \neq f(x)$.

  (a) Démontrer que f s'annule au moins sept fois sur $[0;1]$.

  (b) Donner un exemple d'une telle fonction. On pourra se contenter d'une représentation graphique.

* **Exercice 16**

  Mon boucher ne connaît pas les centimes. Par exemple, j'ai pris 300g de filet à 34,3 euros le kilo, 240g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640g de blanc de poulet à 12,99 le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.

  En ramassant deux tickets par terre, le boucher lit :

  · 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros.

  · 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.

  Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions) ?