Géométrie plane

I) Angles

1) Théorème de l'angle au centre, théorème de l'angle inscrit

Théorème 1 (Théorème de l'angle au centre)**.**

Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A, B et C trois points sur ce cercle.
Si les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ACB}$ interceptent le même arc, alors

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ACB}$$

Corollaire 2 (Théorème de l'angle inscrit)**.**

Si quatre points deux à deux distincts A, B, C et D sont cocycliques *(i.e. appartiennent au même cercle)*, C et D étant du même côté de (AB) alors $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier du théorème de l'angle au centre. □

Théorème 3 (Réciproque)**.**

Si quatre points deux à deux distincts A, B, C et D sont tels que $\widehat{ACB} = \widehat{ADC}$ et les points C et D sont du même côté de la droite (AB), alors les quatre points sont cocycliques

Démonstration. Soit C un point tel que $\widehat{BCA} = \alpha$. Par trois points donnés, il passe un cercle unique qui est le cercle circonscrit au triangle ABC. Soient O le centre de ce cercle et r son rayon.

D'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{BOA} = 2\alpha$. Soit (OH) la médiatrice de $[AB]$. Le triangle OAB est isocèle en O donc (OH) est également la bissectrice de l'angle $\widehat{BOA}$.

$$\sin\alpha = \frac{AH}{AO} = \frac{AB}{2r}, \text{ ce qui donne } r = \frac{AB}{2\sin\alpha}.$$

Ainsi le rayon du cercle circonscrit ne dépend que de la longueur AB et de l'angle α. Il ne dépend pas de la position du point C.

Soit D un autre point tel que $\widehat{BDA} = \alpha$. Alors, d'après ce qui précède, D appartient à un cercle de rayon r. Soit Ω le centre de ce cercle. Ω appartient à la médiatrice de $[AB]$, c'est-à-dire (OH). Comme $\Omega A = r$, nécessairement, $\Omega = O$.

Ce qui démontre que C et D appartiennent à l'arc de cercle de centre O, de rayon r et d'extrémités A et B, autrement dit, les points A, B, C et D sont cocycliques. □

Remarque : On exclut le cas pathologique où A, B, C et D sont alignés.

2) Triangles semblables

Définition 4.

On dit que deux triangles sont **semblables** lorsque leurs angles sont égaux deux-à-deux.

Théorème 5.

Soit ABC et DEF deux triangles.

— Si $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$ alors les triangles ABC et DEF sont semblables et $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{FD}$.

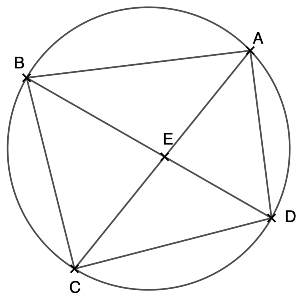
— Si $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{FD}$ alors les triangles ABC et DEF sont semblables et $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$; $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$.

— Si $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{FD}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ alors les triangles ABC et DEF sont semblables.

★ *Exercice :*

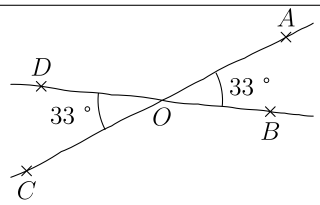
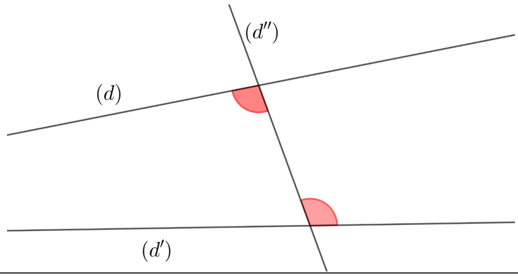
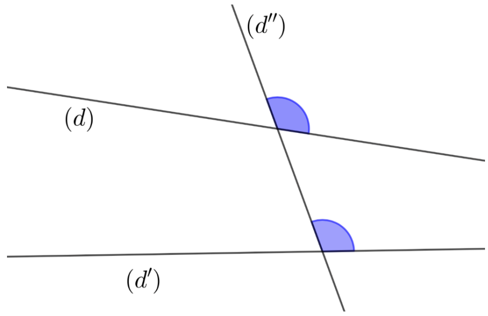
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle. Soit E le point d'intersection de (AC) et (BD). Montrer que $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{BC}{AD}$.

Solution.



A et B sont du même côté que (DC) et les points A, B, C et D sont cocycliques donc $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$.
Les angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{BEC}$ sont opposés par le sommet donc égaux.
Ainsi les triangles AED et BEC sont semblables.
Par correspondance des points, $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{BC}{AD}$.

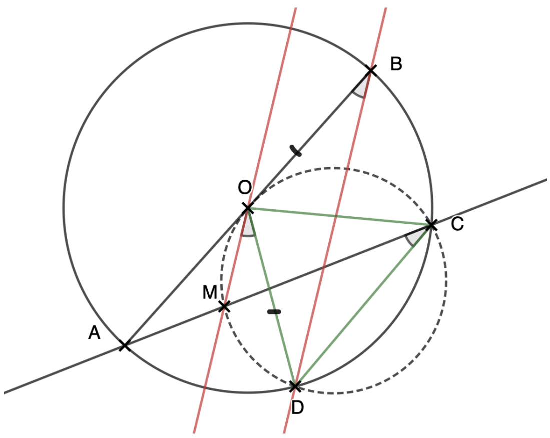
3) Angles alternes-internes, angles opposés par le sommet, angles correspondants

Vocabulaire	Propriété	Exemple
Angles opposés par le sommet	Deux angles opposés par le sommet sont égaux.	
Angles alternes-internes	Deux angles alternes-internes sont égaux si et seulement si (d) et (d') sont parallèles.	
Angles correspondants	Deux angles correspondants sont égaux si et seulement si (d) et (d') sont parallèles.	

★ *Exercice :*

On considère quatre points A, B, C et D situés dans cet ordre sur un cercle de centre O dont $[AB]$ est un diamètre.
Le cercle circonscrit au triangle DOC recoupe en M la droite (AC). Montrer que (MO) et (DB) sont parallèles

Solution.



L'angle $\widehat{MOD}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{MD}$ du cercle circonscrit au triangle DOC. Il a donc la même mesure que l'angle $\widehat{DCM}$. Mais cet angle $\widehat{DCM}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{DA}$ du cercle de centre O, lequel est aussi intercepté par l'angle $\widehat{ABD}$, qui a même mesure que l'angle $\widehat{DCM}$. Or, le triangle DOB est isocèle de sommet principal O donc $\widehat{OBD} = \widehat{ODB}$. Nous sommes donc dans la situation d'angles alternes-internes égaux ($\widehat{MOD}$ et $\widehat{ODB}$) et les droites (MO) et (DB) sont parallèles.

II) Transformations du plan

Il faut penser à ajouter le cas pathologique ... l'identité est la translation de vecteur $\overrightarrow{0}$*, la rotation d'angle* 0*, l'homothétie de rapport* 1.

1) Translation

Définition 6.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Soit M un point du plan, l'image M' de M par la translation t est défini par :

$$t(M) = M' \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}.$$

Propriété(s) 7.

- Les translations conservent le parallélisme, l'alignement, les angles orientés et les intersections.
- Les translations sont des isométries. Elles conservent donc les figures isométriquement (qui conserve les longueurs).
- Les translations ne possèdent pas de point invariant (tout bouge, sauf cas pathologique d'une translation de vecteur nul ... c'est nul !).
- L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle.
- La composée de deux translations de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
- La transformation réciproque de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$.

2) Rotations

Définition 8.

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle θ. Soit M un point du plan, l'image M' de M par la rotation r est défini par :

$$r(M) = M' \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega M = \Omega M' \\ \qquad \text{et} \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \; [2\pi] \end{array} \right.$$

Propriété(s) 9.

- Les rotations conservent le parallélisme, l'alignement, les angles orientés et les intersections.
- Les translations sont des isométries. Elles conservent donc les figures isométriquement.
- Le centre de la rotation est le seul point invariant (comme le Soleil !)
- L'image d'une droite (d) par une rotation d'angle θ est une droite (d') formant un angle θ avec (d).
- La composée de deux rotations et d'angles θ et θ' est :
  - une translation si $\theta + \theta' = 0\,[2\pi]$;
  - une rotation d'angle $\theta + \theta'$ sinon.
- La transformation réciproque de la rotation de centre Ω et d'angle θ est la rotation de centre Ω et d'angle $-\theta$.

3) Réflexions

Définition 10.

Soit s la réflexion d'axe Δ. Soit M un point du plan, l'image M' de M par la réflexion s est défini par :

$$s(M) = M' \iff \begin{cases} \Delta \text{ est la médiatrice de } [MM'] & \text{si } M \notin \Delta \\ M = M' & \text{si } M \in \Delta \end{cases}$$

Propriété(s) 11.

- Les réflexions conservent le parallélisme, l'alignement, les angles et les intersections.
- Les réflexions sont des isométries. Elles conservent donc les figures isométriquement (mais pas l'orientation !).
- Les points invariants sont les points de l'axe de la réflexion.
- L'image d'une droite (d) par la réflexion d'axe Δ est une droite parallèle à (d) si et seulement si ($d \parallel \Delta$ <u>ou</u> $d \perp \Delta$).
- La composée $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ est :
  - la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ (avec $\overrightarrow{u}$ orthogonal à Δ et Δ' est l'image de Δ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$) si $\Delta \parallel \Delta'$.
  - la rotation de centre Ω (point d'intersection de Δ et Δ') et d'angle θ ($\theta = 2 \times \widehat{(\Delta;\Delta')}$) si Δ et Δ' sont sécantes.
- Une réflexion est sa propre réciproque.

4) Homothéties

Définition 12.

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k (avec $k \neq 0$). Soit M un point du plan, l'image M' de M par l'homothétie h est défini par :

$$h(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k \times \overrightarrow{\Omega M}$$

Propriété(s) 13.

- Le centre d'une homothétie, un point et son image sont alignés.
- Les homothéties conservent le parallélisme, l'alignement, les angles orientés et les intersections.
- Les homothéties ne sont pas des isométries (suaf pour $k = 1$ ou $k = -1$). Elles multiplient les longueurs par $|k|$ et donc les aires par k^2. L'image d'une figure est une figure semblable.
- Le centre de l'homothétie est le seul point invariant.
- L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.
- La composée de deux homothéties de rapports k et k' est :
  - une translation si $kk' = 1$;
  - une homothétie de rapport kk' sinon.
- La transformation réciproque de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{1}{k}$.

★ *Exercice : (annale du concours général)*

Dans le plan, soit A, B, C trois points distincts tels que B soit sur le segment $[AC]$.
Soit Γ le cercle de diamètre $[AC]$ et de centre O_1 (de rayon R_1), γ le cercle de diamètre $[BC]$ et de centre O_2 (de rayon R_2), et Δ la tangente en B à γ.

On suppose donné un cercle γ' de centre O_3 (de rayon R_3) qui est tangent extérieurement à γ en un point D, tangent à Δ en E, et tangent intérieurement à Γ en F.

(1) Justifier que les droites Δ et (CF) ne sont pas parallèles.
On note G leur point d'intersection.

(2) Montrer qu'il existe une homothétie de centre C qui transforme γ en Γ et une homothétie de centre F qui transforme Γ en γ'.

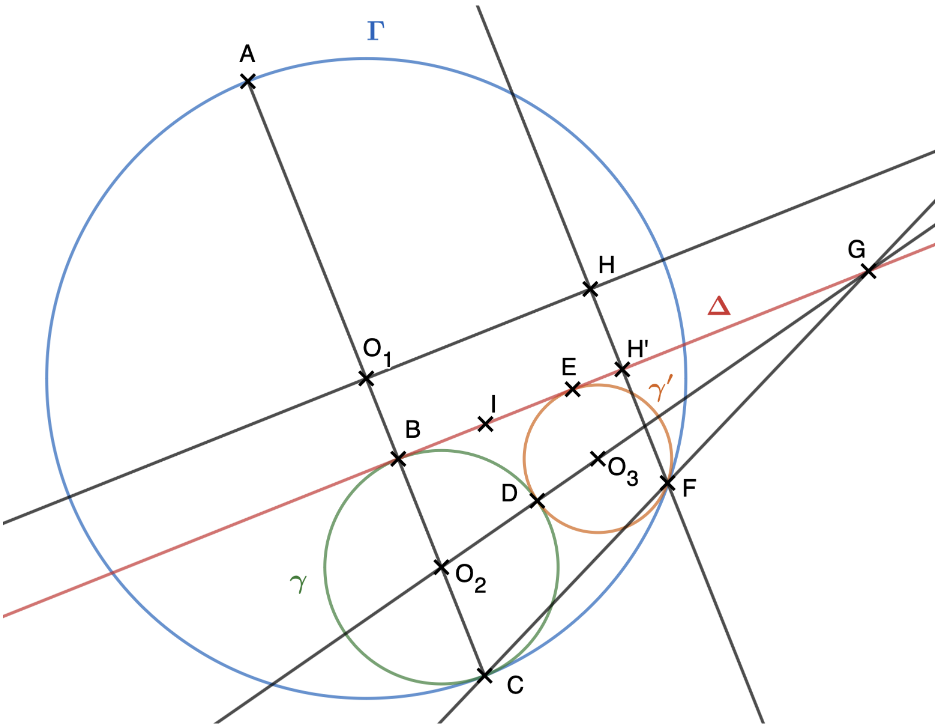
(3) Déterminer les centres des homothéties qui transforment γ en γ'.

(4) Soit I le milieu de $[BE]$.
Montrer que les points A, I, D sont alignés sur une droite orthogonale à (GD).

(5) Montrer que $AB = GD$.

(6) Exprimer le rayon r' de γ' en fonction des rayons R et r de Γ et γ.

Solution.



(1) Soit H le projeté orthogonal de F sur la perpendiculaire à (AC) passant par O_1.
(FH) coupe (BE) en H'.
$FH < FO_1 = O_1C$ (hypoténuse d'un triangle rectangle), donc $FH' < BC$, donc $BH'FC$ est un trapèze non parallélogramme et Δ et (CF) sont sécantes.

(2) Soit h l'homothétie de centre C et qui transforme B en A. Son rapport est $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{R_1}{R_2}$.
L'image par h du cercle de diamètre $[BC]$ est le cercle de diamètre $[AC]$ donc l'image de γ par h est Γ. Cette homothétie convient.

Soit h' l'homothétie de centre F et qui transforme O_1 en O_3. Son rapport est $\dfrac{FO_3}{FO_1} = \dfrac{R_3}{R_1}$.
L'image par h' du cercle de centre O_1 passant par F est le cercle de centre O_3 passant par F donc l'image de Γ par h' est γ'. Cette homothétie convient.

(3) Le rapport des rayons des deux cercles est $\dfrac{R_3}{R_2} \neq 1$, (car $R_3 < R_2$) donc les deux rapports possibles des homotéthies cherchées sont $\dfrac{R_3}{R_2}$ ou $-\dfrac{R_3}{R_2}$. Il n'y a donc que deux possibilités :

— O_2 a pour image O_3 et le rapport est $-\dfrac{R_3}{R_2}$. Posons Ω le centre de l'homothétie.

$$\overrightarrow{\Omega O_3} = -\frac{R_3}{R_2}\overrightarrow{\Omega O_2} \iff \Omega \text{ est le barycentre de } \{(O_3, R_2)(O_2, R_3)\} \iff \Omega = D.$$

L'homothétie de centre D et de rapport $-\dfrac{R_3}{R_2}$ est donc l'unique homothétie de rapport $-\dfrac{R_3}{R_2}$ qui transforme O_2 en O_3. On vérifie qu'elle transforme γ en γ'.

— O_2 a pour image O_3 et le rapport est $\dfrac{R_3}{R_2}$. De même, il existe une unique homothétie de rapport $\dfrac{R_3}{R_2}$ qui transforme O_2 en O_3.

Or, $\dfrac{R_1}{R_2} \times \dfrac{R_3}{R_1} = \dfrac{R_3}{R_2} \neq 1$, donc $h' \circ h$ est une homothétie de rapport $\dfrac{R_3}{R_2}$ et qui transforme γ en γ' (il suffit d'appliquer h puis h'), donc O_2 en O_3.

$h' \circ h$ est donc l'unique homothétie de rapport $\dfrac{R_3}{R_2}$ qui transforme γ en γ'.

Le centre de h est C, donc la droite (CF) est globalement invariante par h.
Le centre de h' est F, donc (CF) est globalement invariante par h', donc (CF) est globalement invariante par $h' \circ h$, donc elle contient le centre de $h' \circ h$.
L'image de B est l'une des intersections de la parallèle à (BO_2) passant par O_3 et de γ'. C'est E car le rapport de l'homothétie est positif, donc (BE) contient le centre de l'homothétie. Le centre de $h' \circ h$ est donc l'intersection de (CF) et (BE), c'est le point G.

Remarque : on en déduit de plus que O_2, D, O_3 et G sont alignés.

(4) C, D et E sont alignés car E est l'image de C par l'homothétie de centre D et de rapport $-\dfrac{R_3}{R_2}$. Par l'homothétie h', l'image de A est E donc A, E et F sont alignés.
F appartient au cercle de diamètre $[AC]$, donc (AF) est perpendiculaire à $(CF) = (CG)$.

Dans le triangle AGC, on connaît donc deux hauteurs (AF) et (BG), qui se coupent en E. (CE) est la troisième hauteur, elle est perpendiculaire à (AG). I est le milieu de $[BE]$ et O_2 de $[BC]$, donc $(IO_2) \parallel (EC)$, donc (IO_2) est perpendiculaire à (AG).

Dans le triangle AGO_2, on a donc deux hauteurs (IO_2) et (BG), qui se coupent en I. (AI) est la troisième hauteur, elle est perpendiculaire à (O_2O_3) donc à (GD).

(O_2I) est parallèle à (CD) *déjà vu* et (CD) est perpendiculaire à (BD), car D appartient au cercle de diamètre $[BC]$, donc (O_2I) est perpendiculaire à (BD) et comme O_2 est équidistant de B et D, (O_2I) est la médiatrice de $[BD]$, donc par symétrie par rapport à (IO_2), $\widehat{O_2DI} = \widehat{O_2BI} = 90°$, donc (ID) est perpendiculaire à $(O_3D) = (O_2O_3)$ donc (AI) et (ID), perpendiculaires à (O_2O_3), sont confondues.

(5) $\widehat{AIB} = \widehat{DIG}$ (angles opposés par le sommet), $\widehat{ABG} = \widehat{IDG} = 90°$ donc ils sont semblables avec un côté égal $IB = ID$, donc ils sont isométriques, donc $AB = GD$.

(6) Soient R_1, R_2 et R_3 les rayons des cercles de centre O_1, O_2 et O_3.
γ' est l'image de γ par l'homothétie de centre G de rapport $\dfrac{R_3}{R_2}$, donc

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{GO_3}{GO_2} = \frac{GD - R_3}{GD + R_2}.$$

Or, $GD = AB = 2R_1 - 2R_2$, donc

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{2R_1 - 2R_2 - R_3}{2R_1 - R_2} = \frac{2R_1 - 2R_2}{2R_1} = 1 - \frac{R_2}{R_1}$$

donc $R_3 = R_2\left(1 - \dfrac{R_2}{R_1}\right)$, soit avec les notations de l'énoncé :

$$r' = r\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

III) Barycentres

Définition 14.

Etant donnés des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ du plan et des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, il existe un unique point G vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

Ce point est appelé barycentre des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ affectés des coefficients (ou poids) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (on dit aussi du système $\{(A_1, \lambda_1)\ldots(A_n, \lambda_n)\}$).

Remarque. On parle d'isobarycentre lorsque les poids affectés à chaque point sont tous égaux.

Exemple. L'isobarycentre de deux points est le milieu de ce segment.

Propriété(s) 15 (Commutativité et homogénéité du barycentre)**.**

Soit G le barycentre du système $\{(A,a)(B,b)\}$.

Commutativité. G est le barycentre du système $\{(B,b)(A,a)\}$.

Homogénéité. Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, G est le barycentre du système $\{(A,ka)(B,kb)\}$.

Démonstration. — On a $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, donc $b\overrightarrow{GB} + a\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$.

— On a (car $k \neq 0$)

$$(k \times a)\ \overrightarrow{GA} + (k \times b)\ \overrightarrow{GB} = k \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

□

Propriété(s) 16 (Formule de Leibniz)**.**

Si G est le barycentre du système $\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\}$, pour tout point M du plan (ou de l'espace)

$$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} &= \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{MG} + \gamma\overrightarrow{GC} \\
&= \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}}_{} + (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} \\
&= \qquad\quad \overrightarrow{0} \qquad + \quad (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}.$$

□

Remarque. Le barycentre de deux points est aligné avec ces deux points.

Propriété(s) 17 (Associativité du barycentre)**.**

Soit G le barycentre de $\{(A_1,\lambda_1)(A_2,\lambda_2)\dots(A_n,\lambda_n)\}$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \neq 0$.

Soit m un entier tel que $1 \leqslant m \leqslant n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \neq 0$.

Si G_m est le barycentre du système $\{(A_1,\lambda_1)\dots(A_m,\lambda_m)\}$ alors G est le barycentre du système $\left\{\left(G_m, \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)(A_{m+1},\lambda_{m+1})\dots(A_n,\lambda_n)\right\}$.

Démonstration. Soit M un point du plan. On a (par la propriété (16)) :

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)\overrightarrow{MG_m} = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overrightarrow{MA_i}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)\overrightarrow{MG_m} + \sum_{i=m+1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{MA_i} &= \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overrightarrow{MA_i} + \sum_{i=m+1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{MA_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{MA_i} \\
&\overset{(16)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\overrightarrow{MG}
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Exemple. ABC est un triangle. On note G l'isobarycentre des points A, B et C.
Montrer que ce point G est le centre de gravité du triangle.

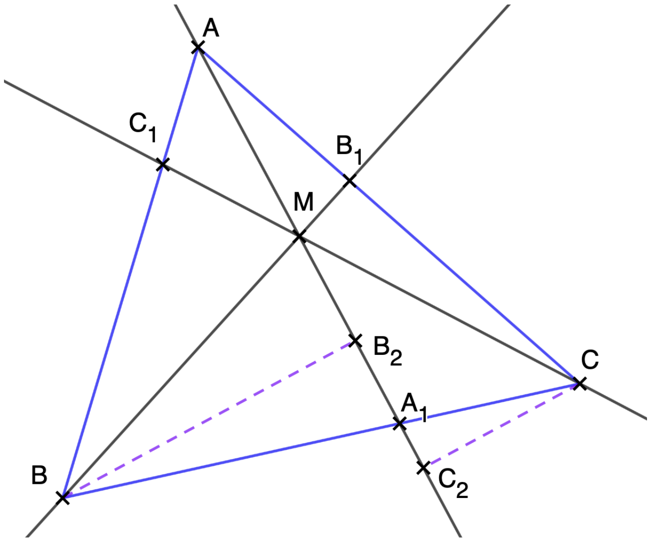
★ *Exercice :*

Soit M un point intérieur au triangle ABC (non aplati).
On désire montrer que M est le barycentre de $\{(A, \mathscr{A}_{MBC})(B, \mathscr{A}_{MAC})(C, \mathscr{A}_{MAB})\}$.
Soit A_1, B_1 et C_1 les points d'intersection de (AM), (BM) et (CM) avec (BC), (AC) et (AB) respectivement.
Soit B_2 et C_2 les projetés orthogonaux de B et C sur (AM).

(1) Montrer que A_1 est le barycentre de $\{(B, \mathscr{A}_{MAC})(C, \mathscr{A}_{MAB})\}$.

(2) Conclure.

Solution.



(1) $\mathscr{A}_{MAC} = \dfrac{AM \times CC_2}{2}$ et $\mathscr{A}_{MAB} = \dfrac{AM \times BB_2}{2}$. Ainsi, $\dfrac{CC_2}{BB_2} = \dfrac{\mathscr{A}_{MAC}}{\mathscr{A}_{MAB}}$.
Les triangles BB_2A_1 et CC_2A_1 sont semblables donc $\dfrac{CC_2}{BB_2} = \dfrac{A_1C}{A_1B}$.
Ainsi, $\dfrac{A_1C}{A_1B} = \dfrac{\mathscr{A}_{MAC}}{\mathscr{A}_{MAB}}$.
Or $\dfrac{1}{A_1B}\overrightarrow{A_1B} = -\dfrac{1}{A_1C}\overrightarrow{A_1C}$ (M est intérieur au triangle donc $A_1 \in [BC]$).
Donc
$$\frac{A_1C}{A_1B}\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathscr{A}_{MAC}}{\mathscr{A}_{MAB}}\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{0}$$
Donc
$$\mathscr{A}_{MAC}\overrightarrow{A_1B} + \mathscr{A}_{MAB}\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{0}$$
or $\mathscr{A}_{MAC} + \mathscr{A}_{MAB} \neq 0$ (car somme de réels strictement positifs), ainsi A_1 est le barycentre de $\{(B, \mathscr{A}_{MAC})(C, \mathscr{A}_{MAB})\}$.

(2) Soit G le barycentre de $\{(A, \mathscr{A}_{MBC})(B, \mathscr{A}_{MAC})(C\mathscr{A}_{MAB})\}$ (la somme des coefficients est non nulle).
Or A_1 est le barycentre de $\{(B, \mathscr{A}_{MAC})(C, \mathscr{A}_{MAB})\}$.
Donc G est le barycentre des points A et A_1 donc G, A et A_1 sont alignés.
On montre de même que G, B et B_1 sont alignés.
Ainsi, $G = M$, le point d'intersection de (AA_1) et (BB_1).

Propriété(s) 18 (Conservation du barycentre)**.**

Si f désigne une transformation usuelle du plan *(translation, réflexion, rotation ou homothétie)* et G le barycentre d'un système de points du plan, alors $f(G)$ est le barycentre de l'image de chacun des points du système.

★ *Exercice :*

A la fin du premier trimestre, Noé s'aperçoit qu'il a obtenu 2 points de moins que Lila à chaque contrôle de mathématiques.
Lila a obtenu les notes $(11, 8, 15, 10)$ affectées respectivement des coefficients $(3, 2, 4, 1)$.
Déterminer la moyenne de mathématiques du premier trimestre de Noé.

Solution. Les notes de Lila correspondent aux abscisses des points A, B, C et D :

$$A(11) \quad ; \quad B(8) \quad ; \quad C(15) \quad ; \quad D(10).$$

Les coefficients de ces notes étaient données par le système :

$$S = \{(A, 3)(B, 2)(C, 4)(D, 1)\}.$$

Les notes coefficientées de Noé sont alors

$$(9, 3) \quad ; \quad (6, 2) \quad ; \quad (13, 4) \quad ; \quad (8, 1).$$

Sur une droite graduée $(O, \overrightarrow{i})$, les notes de Noé sont obtenues par la translation t de vecteur $-2\overrightarrow{i}$. La moyenne de Lila est l'abscisse du barycentre G_L du système S et par conservation du barycentre, $t(G_L) = G_N$ où N est le barycentre du système

$$S' = \{(t(A), 3)(t(B), 2)((t(C), 4)(t(D), 1)\}.$$

Donc la moyenne de Noé est $\bar{x}_N$ donnée par $\bar{x}_N = \bar{x}_L - 2$ où $\bar{x}_L$ est la moyenne de Lila. D'où :

$$\begin{aligned} \bar{x}_N &= \bar{x}_L - 2 \\ &= \frac{3 \times 11 + 2 \times 8 + 4 \times 15 + 1 \times 10}{10} - 2 \\ &= 11,9 - 2 \\ &= 9,9 \end{aligned}$$

IV) Produit scalaire

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Définition 19 (Définitions du produit scalaire)**.**

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. Soit $\overrightarrow{w}$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \pm\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$$

Le signe est déterminé par le sens des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Propriété(s) 20.

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et $k \in \mathbb{R}$.

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$;
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$;
- $(k\,\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k\,(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (k\,\overrightarrow{v})$;
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$;
- $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$;
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$.

Attention aux différentes notations, $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Théorème 21 (Théorème de la médiane)**.**

Soit A et B deux points et I le milieu de $[AB]$.
Pour tout point M du plan, on a

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\
&= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\
&= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\
&= 2\,\overrightarrow{MI}^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 \\
&= 2MI^2 + \frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 \\
&= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2
\end{aligned}$$

□

Exemple. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 4$ où A et B sont deux points du plan avec $AB = 2$.

Par le théorème de la médiane, en notant I le milieu de $[AB]$, on a :

$$2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad MI^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad MI = 1$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon 1.

V) Géométrie analytique

On se place dans un repère orthonormé direct du plan.

1) Parallélisme et orthogonalité

Théorème 22.

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

Rappel. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Théorème 23.

Soit $D\ :\ y = mx + p$ et $D'\ :\ y = m'x + p'$.

$$D \parallel D' \quad \Leftrightarrow \quad m = m'$$

$$D \perp D' \quad \Leftrightarrow \quad m \times m' = -1$$

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' = 0.$$

Démonstration. Un vecteur directeur de D est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de D' est $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$.

— D et D' sont parallèles ssi deux vecteurs qui les dirigent sont colinéaires.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $1\times m' - 1\times m = 0$, *i.e.* $m' = m$.

— D et D' sont perpendiculaires ssi deux vecteurs qui les dirigent sont orthogonaux.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $1\times 1 + m\times m' = 0$, *i.e.* $m\times m' = -1$.

□

2) Distance d'un point à une droite

Théorème 24.

Soient $D\ :\ ax+by+c=0$ et $A(x_A, y_A)$.

$$d(A,D) = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Démonstration. Soient $M(x,y)\in D$, $\vec{n}$ un vecteur normal à D (il est donné par $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$) et $H\in D$ le pied de la hauteur issue de A. Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}$ de deux façons :

$$|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}| = |a(x-x_A)+b(y-y_B)| = |ax_A+by_B+c|.$$

$$|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}| = AH\times\|\vec{n}\| = AH\times\sqrt{a^2+b^2}.$$

On en déduit que $d(A,D) = AH = \dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. □

3) Cercle

Théorème 25.

Le cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ est de rayon $R\geqslant 0$ a pour équation :

$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2 = R^2.$$

Le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ a pour équation :

$$(x-x_A)(x-x_b)+(y-y_A)(y-y_b) = 0$$

Démonstration. Démontrons la deuxième partie du théorème.
Soit $M(x,y)$ un point du cercle de diamètre $[AB]$. Le triangle ABM est alors rectangle en M. Autrement dit, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (x_A-x)(x_B-x)+(y_A-y)(y_B-y) = 0$. □

4) Barycentre

Théorème 26.

Si G est le barycentre du système $\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\}$, alors

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\ ;\ \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right).$$

Démonstration. Utiliser la propriété (16) en particularisant avec le point O, centre du repère orthonormé direct. □

VI) Triangles et droites remarquables

Dans toute la suite, ABC est un triangle non aplati.

1) Droites remarquables du triangle

Théorème 27.

Les trois médianes issues de A, B et C sont concourantes au centre de gravité du triangle ABC.

Démonstration. On note A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
On note m_A, m_B et m_C les médianes issues respectivement des sommets A, B et C.
Soit G le centre de gravité de ABC, G est le barycentre de $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$.
Or A' est le barycentre de $\{(B,1)(C,1)\}$. Donc par associativité du barycentre, G est barycentre de $\{(A,1)(A',2)\}$.
Ainsi, $G \in m_A$.
De manière analogue, on montre que $G \in m_B$ et que $G \in m_C$. D'où le résultat. □

Théorème 28.

Les trois médiatrices sont concourantes au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

Démonstration. On note $m_{[AB]}$, $m_{[BC]}$ et $m_{[CA]}$ les médiatrices respectives des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
Soit O le point d'intersection de $m_{[AB]}$ et $m_{[BC]}$ (ce point existe sinon $(AB) \parallel (BC)$ ...).
$O \in m_{[AB]}$ donc $OA = OB$.
$O \in m_{[BC]}$ donc $OB = OC$.
On en déduit que $OA = OC$ donc $O \in m_{[CA]}$. Les médiatrices sont donc concourantes en un point O vérifiant $OA = OB = OC$ (centre du cercle circonscrit au triangle). □

Théorème 29.

Les trois hauteurs sont concourantes au point H appelé orthocentre du triangle ABC.

Démonstration. On note h_A, h_B et h_C les hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C.
Soit H le point défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (où O est le centre du cercle circnscrit à ABC).
Ainsi, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$ (où A' est le milieu de $[BC]$).
Autrement dit, $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$. Donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires. Donc H appartient à la parallèle à $m_{[BC]}$ passant par A, d'où $H \in h_A$.
De même, H appartient aux deux autres hauteurs. Ainsi les hauteurs sont concourantes en H. □

Définition 30.

La bissectrice d'un angle est la droite qui coupe cet angle en deux angles égaux.

Propriété(s) 31.

Tout point situé sur la bissectrice d'un angle est à égale distance de chaque côté de cet angle. Réciproquement, tout point situé à égale distance des deux côtés d'un angle est sur la bissectrice de cet angle.

Démonstration. Calculer les angles pour obtenir des triangles égaux, donc des longueurs égales... □

Théorème 32.

Les trois bissectrices sont concourantes au point I centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

Démonstration. On note b_A, b_B et b_C les bissectrices issues respectivement des sommets A, B et C.
Soit $I = b_A \cap b_B$ (*il existe, sinon contradiction d'angles alternes-internes égaux et de somme des angles égale à* 180° *dans un triangle, les bissectrices ne peuvent pas être confondues non plus car le triangle est supposé non aplati*).
$I \in b_A$ donc $d(I,(AB)) = d(I,(AC))$.
$I \in b_B$ donc $d(I,(BA)) = d(I,(BC))$.
Donc $d(I,(BC)) = d(I,(AC))$.
Or, I est intérieur à l'angle $\widehat{BCA}$, donc $I \in b_C$.
Ainsi les bissectrices sont concourantes en un point I vérifiant $d(I,(AB)) = d(I,(BC)) = d(I,(AC))$ (centre du cercle inscrit). □

★ *Exercice :*

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On considère un point P intérieur au triangle ABC et tel que : $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$.
Montrer que $AP \geqslant AI$ et que l'égalité n'est vérifiée que lorsque $P = I$.

Solution. Posons $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$ et $\widehat{ACB} = \gamma$.
On a alors
$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} + \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \beta + \gamma$$
La condition du problème est donc équivalente à
$$\widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \frac{\beta+\gamma}{2}$$
i.e.
$$\begin{aligned}\widehat{BPC} &= 180 - \frac{\beta+\gamma}{2}\\ &= 180 - \frac{180-\alpha}{2}\\ &= 90 - \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$
Par ailleurs, $\widehat{BIC} = 180 - \dfrac{\beta+\gamma}{2}$. D'où $\widehat{BPC} = \widehat{BIC}$.

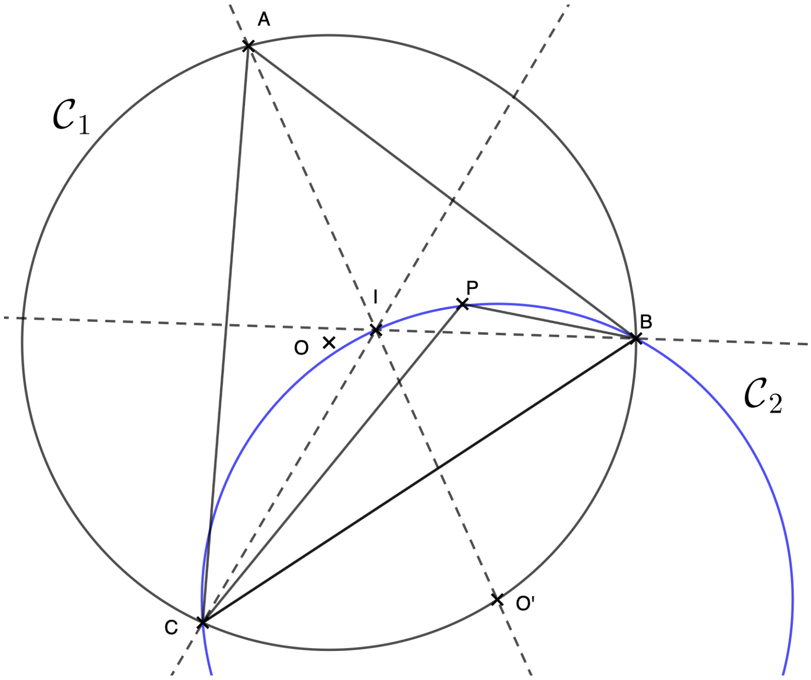
Puisque P et I sont du même côté de (BC) et que $\widehat{BPC} = \widehat{BIC}$, les quatre points B, C, P et I sont cocycliques. Autrement dit, P appartient au cercle circonscrit $\mathscr{C}_2$ du triangle BCI.

La droite (AI) recoupe le cercle circonscrit $\mathscr{C}_1$ à ABC (de centre O) en un point O' : on va montrer que ce point O' est le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}_2$ à BIC.

$\widehat{O'AC} = \widehat{O'AB} = u$ (puisque (AI)=(AO') est la bissectrice de l'angle en A de ABC), on a $\widehat{O'OC} = 2u = \widehat{O'OB}$ et ainsi les deux triangles BOO' et COO' sont semblables (un angle, deux côtés) et $O'B = O'C$.

On a :
$$\widehat{ICO'} = \frac{c}{2} + \widehat{BCO'} = \frac{c}{2} + \widehat{BAO'}, \quad \text{donc} \quad \widehat{ICO'} = \frac{c}{2} + \frac{a}{2} = \widehat{O'IC},$$
(*tracer la parallèle à* (AC) *et utiliser les propriétés des angles alternes-internes et correspondants*), et ainsi $IO'C$ est isocèle en O' et $O'C = O'I$.
Toujours est-il que $O'B = O'C = O'I$, et O' est bien le centre du cercle $\mathscr{C}_2$ circonscrit à BCI.
Comme P est sur ce cercle, on a $O'P = O'I$, ce qui va permettre de terminer.

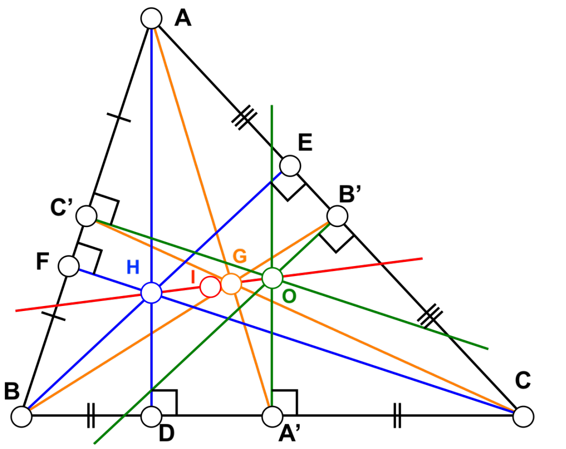
En effet $AO' = AI + IO' = AI + PO'$ et $AO' \leqslant AP + PO'$ (inégalité triangulaire), donc on a bien $AI \leqslant AP$.
Si $P = I$, on a évidemment $AP = AI$; réciproquement, si $AP = AI$, alors $AI + IO' = AP + PO'$, soit $AO' = AP + PO'$, donc P est sur le segment $[AO']$ (cas d'égalité de l'inégalité triangulaire) et donc $P = I$, puisque $AP = AI$ et P et I sont sur $[AO']$. On a bien $AP = AI$ si et seulement si $P = I$.



Théorème 33.
Les points G, H et O sont alignés.
Dans le cas où ils ne sont pas confondus, ils définissent une droite appelée droite d'EULER.

Démonstration. Voir exercice qui suit ... □

Illustration : le point rouge est le centre du cercle d'EULER (voir exercice)



★ *Exercice :*

Soit ABC un triangle. On appelle :
— A', B', C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$;
— D, E et F les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A, B et C ;
— G le centre de gravité du triangle ABC.

(1) On note O le centre du cercle $\mathscr{C}_1$ circonscrit au triangle ABC et H le point défini par
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$
Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
Qu'en déduit-on pour les points O, G et H ?

(2) On note I, M, N et P les milieux respectifs des segments $[OH]$, $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$.
On appelle $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre I de rayon la moitié du rayon du cercle $\mathscr{C}_1$.
Démontrer que $\overrightarrow{IM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{IA'}$.
En déduire que le segment $[MA']$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}_2$.

(3) Montrer que le point D appartient au cercle $\mathscr{C}_2$.

(4) Donner neuf points situés sur le cercle $\mathscr{C}_2$ (il s'agit naturellement de nommer neuf points de la figure définis sans référence au cercle ...).

Solution.

(1) (OA') est la médiatrice de $[BC]$. Il est clair (règle du parallélogramme) que $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$ et la relation $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ peut alors s'écrire : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.
Or, $(OA') \perp (BC)$ et (on vient de voir que) $(OA') \parallel (AH)$, donc le point H est situé sur la hauteur issue de A.
On montrerait évidemment de même que H est situé sur les hauteurs issues de B et C.
H est donc à l'intersection des hauteurs du triangle ABC : H n'est autre que l'orthocentre de ce triangle.

Par la relation de Chasles, on a

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{OH} & = & \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \\
 & = & (\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}) \\
 & = & 3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} \\
 & = & 3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{OH} & = & 3\overrightarrow{OG}
\end{array}$$

On en déduit que les points O, G et H sont alignés.

(2) Dans le triangle HAO, M est le milieu de $[HA]$ et I est le milieu de $[OH]$, d'après le théorème de la droite des milieux, $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

De plus,

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{IM} & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \\
 & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \\
 & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}\right) \\
 & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\right) \\
 & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right) \\
 & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}-\frac{1}{2}\times 2\overrightarrow{OA'} \\
 & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA'} \\
 & = & -\overrightarrow{IO}-\overrightarrow{OA'} \\
 & = & \overrightarrow{OI}+\overrightarrow{A'O} \\
 & = & \overrightarrow{A'I} \\
 & = & -\overrightarrow{IA'}
\end{array}$$

D'où le résultat.
Comme $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{A'I}$, I est le milieu de $[A'M]$ donc c'est un diamètre de $\mathscr{C}_2$.

(3) Le triangle MDA' est rectangle en D et $[MA']$ est un diamètre de $\mathscr{C}_2$ donc $D \in \mathscr{C}_2$.

(4) Le cercle $\mathscr{C}_2$ passe par :
— les trois milieux A', B' et C' côtés du triangle ABC ;
— les trois pieds D, E et F des hauteurs du triangle ABC ;
— les trois milieux des segments reliant les sommets à l'orthocentre H du triangle ABC.

2) Théorème de Thalès, théorème de Menelaüs

Définition 34 (Mesure algébrique).

Soit (d) une droite munie d'un repère $(O, \vec{i})$. Soit A et B deux points de (d).
On définit la **mesure algébrique** de AB notée $\overline{AB}$ par :

- ▷ $\overline{AB} = AB$ si $\overrightarrow{AB}$ est de même sens que $\vec{i}$;
- ▷ $\overline{AB} = -AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont de sens contraires.

Théorème 35 (Thalès).

Soit A, B et C trois points non alignés et M et N des points respectivement de (AC) et (BC).

Si (MN) est parallèle à (AB) alors $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{CB}}$ (ou $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$).

Si $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{CB}}$, alors (MN) est parallèle à (AB).

Remarque. Cette version simplifiée par rapport à la version connue depuis la classe de 3e est facilitée par la notion de mesure algébrique.

Théorème 36 (Menelaüs).

Soit A, B et C trois points non alignés.
Soit M, N et P trois points appartenant respectivement à (BC), (AC) et (AB) distincts de A, B et C.

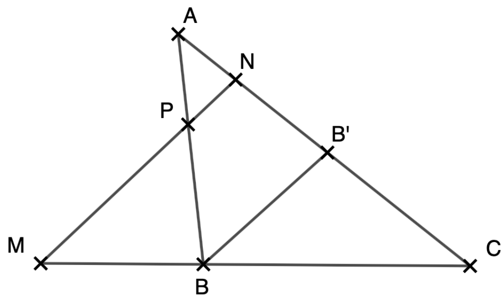
Les points M, N et P sont alignés si et seulement si $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

★ *Exercice :*

Démontrer le théorème de Menelaüs [1].

Indication. Par double implication. Introduire le point B' intersection de la parallèle (MN) passant par B et de (AC).

Solution. Soit B' l'intersection de la parallèle (MN) passant par B et de (AC).



$\Rightarrow$: Supposons que les points M, N et P sont alignés.
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NB'}}{\overline{NC}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB'}}$$

Ainsi,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{NB'}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{AN}}{\overline{NB'}} = 1$$

$\Leftarrow$: Supposons que $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.
Si (MN) est parallèle à (AB) on aurait

1. Ménélaüs d'Alexandrie (fin du Ier siècle), membre de l'université d'Alexandrie, puis astronome à Rome. Beaucoup d'écrits n'ont pas survecus au temps ... Il étudie les triangles sphériques, l'astronomie et les premiers résultats de trigonométrie sphérique.

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$$

Compte tenu de l'hypothèse, on aurait $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$, soit $\overline{PA} = \overline{PB}$, donc on aurait $A = B$ ce qui est impossible.
On en déduit que (MN) et (AB) sont sécantes en K.
D'après la partie directe du théorème, on a $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \dfrac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = 1$, soit (d'après l'hypothèses), $\dfrac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$.
Ceci implique que $K = P$. On en conclut que les points M, N et P sont alignés.

VII) Formules du triangle

Dans toute la suite, ABC est un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ (on suppose évidemment ces longueurs non nulles).

1) Formule des sinus et conséquences

Théorème 37 (Formule (ou loi) des sinus)**.**
Si R est le rayon du cercle circonscrit à ABC, alors

$$\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} = 2R.$$

Théorème 38 (Deuxième formule des sinus)**.**
Si S est l'aire de ABC, alors

$$\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} = \frac{abc}{2S}.$$

Démonstration. Découle de la formule des sinus car $S = \dfrac{1}{2}\, b\, c \sin(\widehat{BAC})$. □

Corollaire 39.
Si S est l'aire de ABC et R le rayon du cercle circonscrit, alors

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Corollaire 40.
Soit J le point d'intersection de la bissectrice issue de A avec (BC), alors

$$\frac{JB}{JC} = \frac{c}{b}.$$

2) Théorème d'Al-Kashi

Théorème 41 (Théorème d'Al-Kashi)**.**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c\, \cos(\widehat{BAC}).$$

3) Formule de Héron

Théorème 42 (Formule de Héron)**.**

Si S est l'aire du triangle ABC et $\mathscr{P}$ le demi-périmètre du triangle ($\mathscr{P} = \dfrac{a+b+c}{2}$), alors

$$S = \sqrt{\mathscr{P}(\mathscr{P}-a)(\mathscr{P}-b)(\mathscr{P}-c)}.$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll}
S^2 & = & \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2(\widehat{BAC}) & \\
& = & \frac{1}{4}b^2c^2\left(1-\cos^2(\widehat{BAC})\right) & \\
& = & \frac{1}{4}b^2c^2\left(1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right) & \text{par le théorème d'Al-Kashi} \\
& = & \frac{1}{4}b^2c^2 - \frac{1}{16}(b^2+c^2-a^2)^2 & \\
& = & \frac{1}{16}\left[(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2\right] & \\
& = & \frac{1}{16}(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2) & \\
& = & \frac{1}{16}(a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2) & \\
& = & \frac{1}{16}(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a) & \\
& = & \frac{1}{16}(2\mathscr{P}-2b)(2\mathscr{P}-2c)(2\mathscr{P}-2a)(2\mathscr{P}) & \\
& = & (\mathscr{P}-b)(\mathscr{P}-c)(\mathscr{P}-a)\mathscr{P} &
\end{array}$$

D'où le résultat. □

★ *Exercice :*

Existe-t-il un triangle d'aire entière et dont les côtés sont des nombres premiers ?

Solution. La formule de Héron [2] permet d'écrire que

$$16S^2 = (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a).$$

Puisque $16S^2$ est pair, on en déduit que le produit dans le membre de droite l'est aussi.
Sans perte de généralité, supposons que $a \leqslant b \leqslant c$.
Par disjonction de cas (a, b et c sont premiers, distinguons les cas avec 2) :

- Si $a = b = c = 2$, alors $16S^2 = 48$, d'où $S^2 = 3$, ce qui est impossible.
- Si a, b et c sont impairs, alors le produit du membre de droite est impair, ce qui est impossible.
- Si $a = b = 2$ et c est impair, alors le produit du membre de droite est impair, ce qui est impossible.
- Si $a = 2$ et b et c sont impairs, par l'inégalité triangulaire, $c < 2 + b$ mais $b \leqslant c$ donc

$$b \leqslant c < 2 + b$$

  On en déduit que $0 \leqslant c - b < 2$, impossible car $c - b$ pair.

Ainsi, il n'existe pas de triangle d'aire entière dont les côtés sont des nombres premiers.

2. Héron d'Alexandrie (fin du Ier siècle après J.-C.) sans doute égyptien. Il travaille avant tout la géométrie et ses applications pratiques.