Géométrie plane

I. Angles.

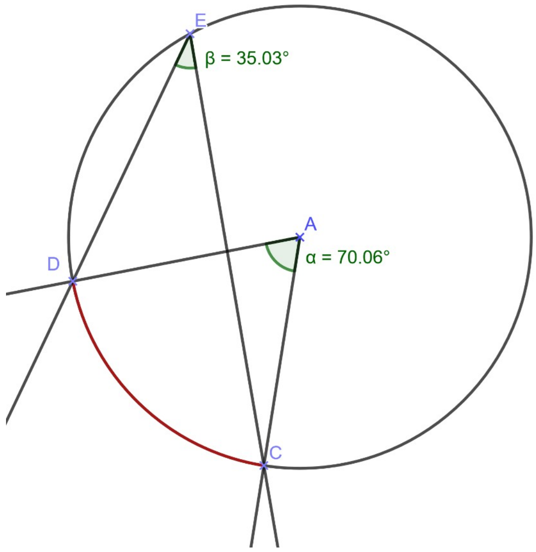
Propriété 1: La somme des angles d'un triangle vaut Π radians.

A. *Angles au centre, angles inscrits.*

Vocabulaire:

Considérons le cercle de centre A ci-contre.

- $\widehat{DAC}$ est l'angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{DC}$.
- $\widehat{DEC}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{DC}$.



Théorème 1: (de l'angle au centre)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre A et C, D et E trois points du cercle. Si les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{DEC}$ interceptent le même arc de cercle, alors $\widehat{DAC}=2\times\widehat{DEC}$

Théorème 2: (de l'angle inscrit)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre A et B,C, D et E quatre points du cercle. Si les angles $\widehat{DBC}$ et $\widehat{DEC}$ interceptent le même arc de cercle, alors $\widehat{DBC}=\widehat{DEC}$

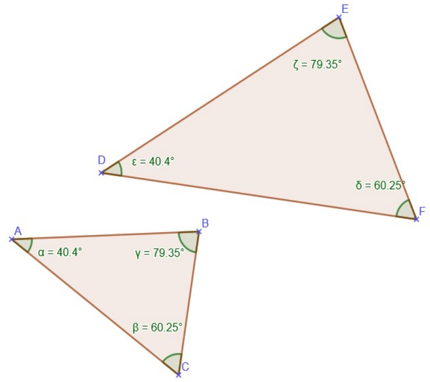
Théorème 3: (réciproque de l'angle inscrit)

Soit B,C, D et E quatre points deux à deux distincts. Si $\widehat{DBC}=\widehat{DEC}$ et les points B et E sont du même côté de la droite (DC) , alors les quatre points sont cocycliques.

B. Triangles semblables.

<u>Définition</u>:

On dit que deux triangles sont semblables si leurs angles ont la même mesure deux à deux.



<u>Théorème 4</u>: (des triangles semblables)

Soient ABC et DEF, deux triangles.

1. Si $\widehat{BAC}=\widehat{EDF}$ et $\widehat{BCA}=\widehat{EFD}$, alors les triangles sont semblables et $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{CA}{FD}$,
2. Si $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{CA}{FD}$, alors les triangles sont semblables et $\widehat{BAC}=\widehat{EDF}$, $\widehat{BCA}=\widehat{EFD}$ et $\widehat{ABC}=\widehat{\mathrm{DEF}}$,
3. Si $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{CA}{FD}$ et $\widehat{BAC}=\widehat{EDF}$, alors les triangles sont semblables.

<u>Exercice 1</u>:

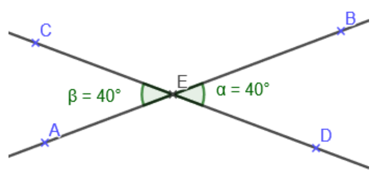
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle et E le point d'intersection de (AC) et (BD).

➢ Montrer que $\dfrac{EB}{EA}=\dfrac{BC}{AD}$.

C. *Angles alternes, correspondants et opposés.*

<u>Vocabulaire</u>: (cas de deux droites sécantes)

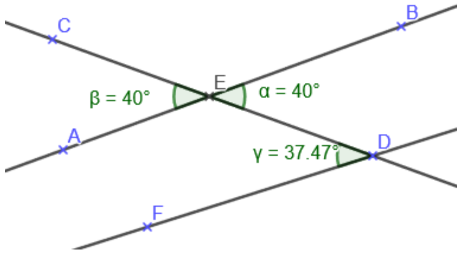
$\widehat{CEA}=\widehat{BED}$ sont des angles opposés par le sommet.



Vocabulaire: (cas de deux droites coupées par une troisième)

$\widehat{FDE}=\widehat{BED}$ sont des angles alternes-internes.

$\widehat{CEA}=\widehat{FDE}$ sont des angles correspondants.



Propriété 2:

- Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
- Deux angles alternes-internes ont la même mesure si et seulement si $(d)//(d')$.
- Deux angles correspondants ont la même mesure si et seulement si $(d)//(d')$.

Exercice 2:

On considère quatre points A, B, C et D situés dans cet ordre sur un cercle de centre O dont $[AB]$ est un diamètre. Le cercle circonscrit au triangle DOC recoupe (AC) en M.

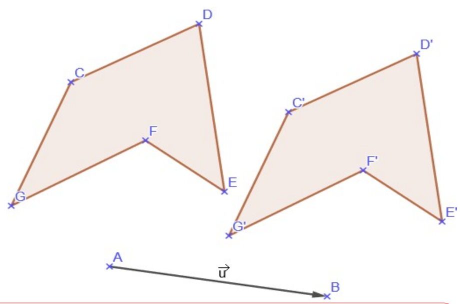
➢ Montrer que $(MO)//(DB)$.

II. Transformations du plan.

A. *Translations.*

Définition:

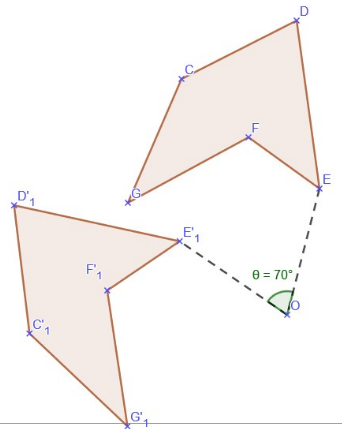
Soit un vecteur $\vec{u}$ du plan. La translation t de vecteur $\vec{u}$ transforme le point M en point M' tel que $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.



Propriété 3:

- Les translations conservent le parallélisme, l'alignement et les angles orientés.
- Les translations sont des isométries (elles conservent les longueurs).
- Les translations ne possèdent pas de point invariant (sauf pour la translation de vecteur nul).
- La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
- La transformation réciproque de la translation de vecteur $\vec{u}$ est une translation de vecteur $-\vec{u}$.

B. Rotations.



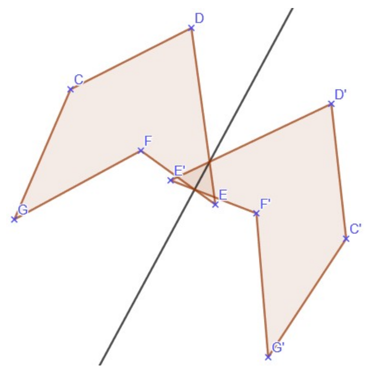
Définition:

Soit O un point du plan et un angle orienté de mesure θ. La rotation r, de centre O et d'angle θ , transforme le point M en point M' tel que : $\begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{OM} ; \vec{OM'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$.

Propriété 4:

- Les rotations conservent le parallélisme, l'alignement et les angles orientés.
- Les rotations sont des isométries.
- Le centre de la rotation est son seul point invariant.
- La composée de deux rotations d'angles θ et θ' est :
  - ✳ une translation si $\theta + \theta' \equiv 0 [2\pi]$,
  - ✳ une rotation d'angle $\theta + \theta'$ sinon.
- La transformation réciproque de la rotation r de centre O et d'angle θ est la rotation r' de centre O et d'angle -θ.

C. Réflexions.



Définition: Soit (Δ) une droite du plan.

La réflexion s d'axe (Δ) transforme le point M en point M' tel que :

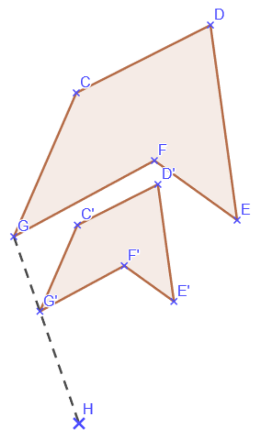
$$\begin{cases} (\Delta) \text{ est la médiatrice de } [MM'], \text{ si } M \notin (\Delta) \\ M = M' \text{ , si } M \in (\Delta) \end{cases}.$$

Propriété 5:

- Les réflexions conservent le parallélisme, l'alignement et les angles non orientés.
- Les réflexions sont des isométries. Attention, l'orientation n'est pas conservée !
- Les points de l'axe (Δ) de la réflexion sont les seuls points invariants.

- La composée de deux réflexions d'axe (Δ) et (Δ') est :
  - ✳ une translation de vecteur $\vec{u}$ si $(\Delta)/\!/(\Delta')$, tel que $\vec{u}$ orthogonal à (Δ) et $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)=(\Delta')$;
  - ✳ une rotation de centre *O* (l'intersection de (Δ) et (Δ')) et d'angle $\theta=2\left(\widehat{(\Delta);(\Delta')}\right)$ si (Δ) et (Δ') sont sécantes
- Une réflexion est sa propre réciproque.
- L'image d'une droite (*d*) par la réflexion d'axe (Δ) est une droite parallèle à (*d*) si et seulement si $(d)/\!/(\Delta)$ ou $(d)\perp(\Delta)$.

D. *Homothéties.*



<u>Définition</u>: Soit *O* un point du plan et *k* un réel non nul.

- L'homothétie de centre *O* et de rapport *k* transforme le point *M* en point *M'* tel que $O\vec{M}'=k\times O\vec{M}$.
- L'image d'une figure est une figure **<u>semblable</u>**.

<u>Propriété 6</u>:

- Les homothéties conservent le parallélisme, l'alignement et les angles orientés.
- Les homothéties **ne sont pas** des isométries (sauf pour $k=\pm 1$). Elles multiplient les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2.
- Le centre de l'homothétie est le seul point invariant.
- La composée de deux homothéties de rapport *k* et *k'* est :
  - ✳ une translation si $kk'=1$.
  - ✳ une homothétie de rapport *kk'* sinon.
- La transformation réciproque de l'homothétie de centre *O* et de rapport *k* est l'homothétie de centre *O* et de rapport $\frac{1}{k}$.
- L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.
- Le centre d'une homothétie, un point et son image sont alignés.

Exercice 3: (annale du concours général)

Dans le plan, soient A, B, C trois points distincts tels que B soit sur le segment $[AC]$.

Soit Γ le cercle de diamètre $[AC]$ et de centre O_1 (de rayon R_1), γ le cercle de diamètre $[BC]$ et de centre O_2 (de rayon R_2), et (Δ) la tangente en B à γ.

On suppose donné un cercle γ' de centre O_3 (de rayon R_3) qui est tangent extérieurement à γ en un point D, tangent à (Δ) en E, et tangent intérieurement à Γ en F.

1) Justifier que les droites (Δ) et (CF) ne sont pas parallèles. On note G leur point d'intersection.
2) Montrer qu'il existe une homothétie de centre C qui transforme γ en Γ et une homothétie de centre F qui transforme Γ en γ'.
3) Déterminer les centres des homothéties qui transforment γ en γ'.
4) Soit I le milieu de $[BE]$. Montrer que les points A, I, D sont alignés sur une droite orthogonale à (GD).
5) Montrer que $AB=GD$.
6) Exprimer le rayon r' de γ' en fonction des rayons R et r de Γ et γ.

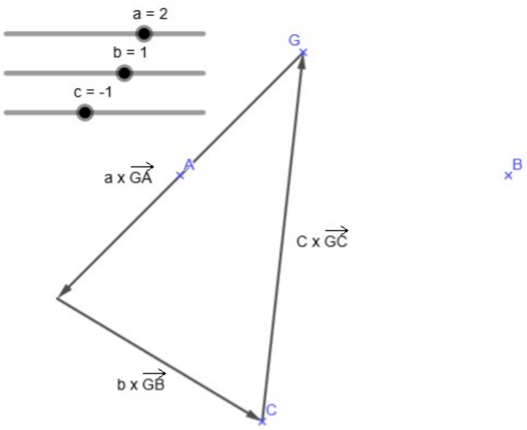
III. Barycentres.

Propriété – définition 7:

Soient A_1, A_2, … A_n, des points du plan et des réels λ_1, λ_2, …, λ_n, des réels tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 0$.

Alors il existe un unique point G du plan tel que : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{GA_k} = \vec{0}$. Ce point est appelé barycentre des points A_1, A_2, … A_n, affecté des poids (ou coefficients) λ_1, λ_2, …, λ_n, (ou encore du système $\{(A_1;\lambda_1);...;(A_n;\lambda_n)\}$)

Exemple: G est le barycentre du système $\{(A;2);(B;1);(C;-1)\}$



Remarque:

On parle d'isobarycentre lorsque les poids affectés à chaque point sont tous égaux. Par exemple, l'isobarycentre de deux points est le milieu de ce segment, celui de trois points est le centre de gravité du triangle.

Propriété 8: Soit G le barycentre du système $\{(A,a);(B,b)\}$.

1. (*Commutativité*) G est aussi le barycentre du système $\{(B,b);(A,a)\}$.
2. *(Homogénéité)* Pour tout $k\in\mathbb{R}^*$, G est le barycentre du système $\{(A;ka);(B;kb)\}$.

Démonstration:

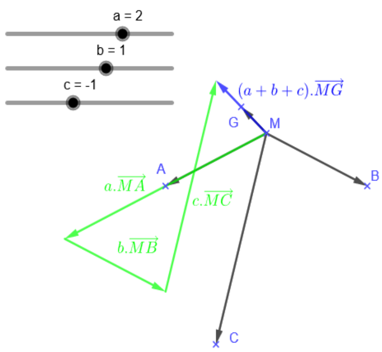
1. Évident.
2. $ka+kb=k(a+b)\neq 0$ car $k\in\mathbb{R}^*$.

   $ka\vec{GA}+kb\vec{GB}=k(a\vec{GA}+b\vec{GB})=k\vec{0}=\vec{0}$.

Propriété 9:

Si G est le barycentre du système $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$, pour tout point M du plan (ou de l'espace) :

$$(\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}=\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MC} \ .$$



Démonstration:

On a :
$$\begin{aligned}\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\gamma\vec{MC} &= \alpha(\vec{MG}+\vec{GA})+\beta(\vec{MG}+\vec{GB})+\gamma(\vec{MG}+\vec{GC})\\ &= (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}+\alpha\vec{GA}+\beta\vec{G}+\gamma\vec{GC}\\ &= (\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}\end{aligned}$$

<u>Propriété 10</u>: (Associativité du barycentre).

Soit G le barycentre de $\{(A_1;\lambda_1);\ldots;(A_n;\lambda_n)\}$ avec $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\neq 0$. Soit m un entier tel que $1\leqslant m\leqslant n$ tel que $\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\neq 0$. Si G_m est le barycentre du système $\{(A_1;\lambda_1);\ldots;(A_m;\lambda_m)\}$ alors G est le barycentre du système : $\left\{\left(G_m;\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\right);(A_{m+1};\lambda_{m+1});\ldots;(A_n;\lambda_n)\right\}$.

Démonstration:

Soit M un point du plan. On a (par la propriété (16)) : $\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\right)\vec{MG}_m=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\vec{MA}_k$.

Donc : $\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\right)\vec{MG}_m+\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\vec{MA}_k=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\vec{MA}_k+\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\vec{MA}_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\vec{MA}_k=\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)\vec{MG}$, ce qui achève la preuve.

<u>Exemple</u>:

Soit ABC est un triangle. On note G l'isobarycentre des points A, B et C.

- Montrer que ce point G est le centre de gravité du triangle.

<u>Exercice 4</u>:

Soit M un point intérieur au triangle ABC (non aplati). On désire montrer que M est le barycentre de $(A,A_{MBC});(B,A_{MAC});(C,A_{MAB})$.

Soit A_1, B_1 et C_1 les points d'intersection de (AM), (BM) et (CM) avec (BC), (AC) et (AB) respectivement. Soit B_2 et C_2 les projetés orthogonaux de B et C sur (AM).

1. Montrer que A_1 est le barycentre de $(B,A_{MAC})(C,A_{MAB})$.
2. Conclure.

<u>Propriété 11</u> (Conservation du barycentre).

Si f désigne une transformation usuelle du plan (translation, réflexion, rotation ou homothétie) et G le barycentre d'un système de points du plan, alors $f(G)$ est le barycentre de l'image de chacun des points du système.

Exercice:

A la fin du premier trimestre, Noé s'aperçoit qu'il a obtenu 2 points de moins que Lila à chaque contrôle de mathématiques. Lila a obtenu les notes (11, 8, 15, 10) affectées respectivement des coefficients (3, 2, 4, 1).

- Déterminer la moyenne de mathématiques du premier trimestre de Noé.

IV. Produit scalaire.

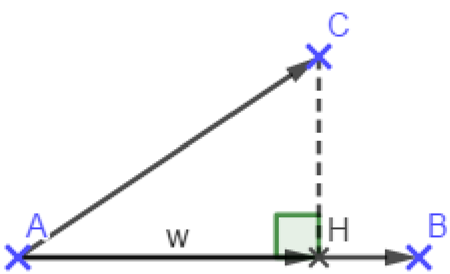
Le plan est munie d'un repère orthonormé.

Définition:
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$, est défini par : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\ \cos(\vec{u},\vec{v})$.

Caractérisation:

Soient trois points A, B et C. Posons H le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :

$$\vec{AB}.\vec{AC}=\vec{AB}.\vec{AH}=\begin{cases} AB\times AH & si\ \widehat{BAC}\in[0;\frac{\pi}{2}] \\ -AB\times AH & si\ \widehat{BAC}\in[\frac{\pi}{2};\pi] \end{cases}$$



Propriété 12:
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors:

- $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|\ \|\vec{u}\|\ \cos(\vec{u},\vec{u})=\|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$

Propriété 13:
Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$, alors on a :

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.(k.\vec{v})=(k.\vec{u}).\vec{v}=k\times\vec{u}.\vec{v}$

Propriété 14: Soient deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$, alors on a :

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
- $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$
- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

Démonstration:

Cela provient des règles de distributivité, par exemple : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

Théorème 5: (de la médiane)

Soit A et B deux points et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2} .$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}
MA^2+MB^2 &= \vec{MA}^2+\vec{MB}^2\\
&=(\vec{MI}+\vec{IA})^2+(\vec{MI}+\vec{IB})^2\\
&=\vec{MI}^2+2\vec{MI}.\vec{IA}+\vec{IA}^2+\vec{MI}^2+2\vec{MI}.\vec{IB}+\vec{IB}^2\\
&=\vec{MI}^2+2\vec{MI}.-\frac{1}{2}\vec{AB}+\left(\frac{-1}{2}\vec{AB}\right)^2+\vec{MI}^2+2\vec{MI}.\frac{1}{2}\vec{AB}+\left(\frac{1}{2}\vec{AB}\right)^2\\
&=2MI^2+\frac{1}{4}AB^2+\frac{1}{4}AB^2\\
&=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2
\end{aligned}$$

Exemple:

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2+MB^2=4$ où A et B sont deux points du plan avec $AB=2$.

Correction: Par le théorème de la médiane, en notant I le milieu de $[AB]$, on a :

$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}=4 \Leftrightarrow MI^2=1 \Leftrightarrow MI=1$. L'ensemble des points M est donc le cercle de centre I et de rayon 1.

V. Géométrie analytique.

Le plan est munie d'un repère orthonormé direct.

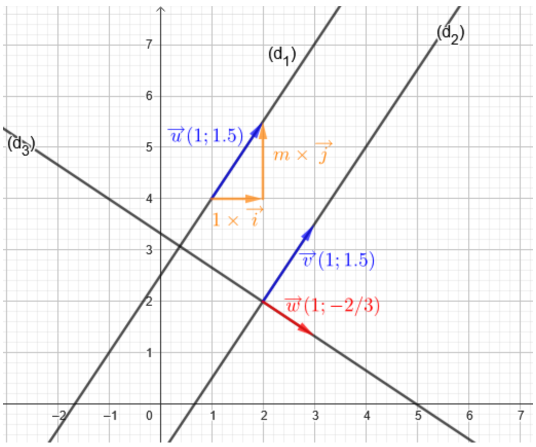
A. *Parallélisme et orthogonalité*

Théorème 6: Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

Alors $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$. De plus $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow xx'+yy'=0$.

Théorème 7: Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

Alors les vecteurs sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$.



Théorème 8:
Soient $(D): y=mx+p$ et $(D'): y=m'x+p'$.

1. $(D)/\!/(D')\Leftrightarrow m=m'$
2. $(D)\perp(D')\Leftrightarrow m\times m'=-1$

Démonstration:

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (D') est $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$

- (D) et (D') sont parallèles si et seulement si deux vecteurs qui les dirigent sont colinéaires.

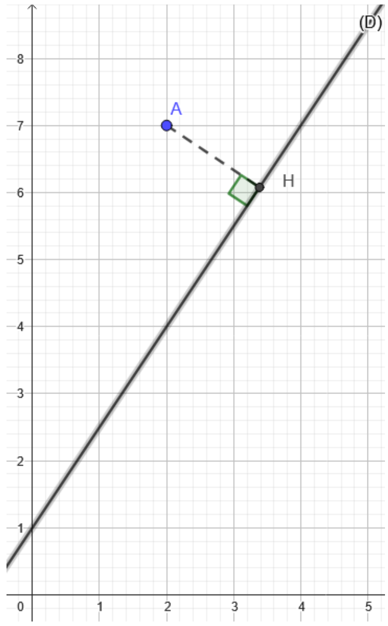
  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $1\times m'-1\times m=0\Leftrightarrow m'=m$.
- (D) et (D') sont perpendiculaires si et seulement si deux vecteurs qui les dirigent sont orthogonaux.

  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $1\times 1+m'\times m=0\Leftrightarrow mm'=-1$.

B. *Distance d'un point à une droite*

<u>Théorème 9</u>: Soient (D) : $ax+by+c=0$ et $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$.

$$d(A,D)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



Démonstration:

Soient $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in(D)$, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ (qui est un vecteur normal à (D))

et H le pied de la hauteur issue de A.

Calculons le produit scalaire $\vec{AM}\cdot\vec{n}$ de deux façons :

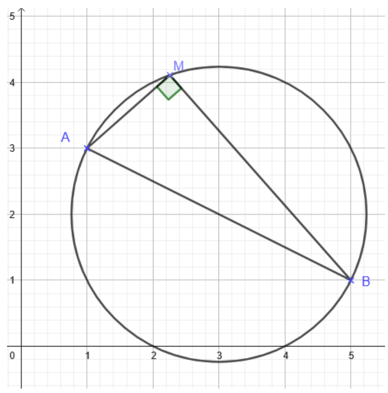
- $|\vec{AM}\cdot\vec{n}|=|a(x-x_A)+b(y-y_B)|=|ax_A+by_B+c|$,
- $|\vec{AM}\cdot\vec{n}|=AH\times\|\vec{n}\|=AH\times\sqrt{a^2+b^2}$.

On en déduit que $d(A,D)=AH=\dfrac{|\vec{AM}\cdot\vec{n}|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|ax_A+by_B+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

C. *Cercle*

<u>Théorème 10</u>:

1. Le cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix}x_\Omega\\y_\Omega\end{pmatrix}$, de rayon $R\geqslant 0$, a pour équation : $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=R^2$.
2. Le cercle de diamètre [AB] avec $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ a pour équation : $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$.



Démonstration : Démontrons la deuxième partie du théorème.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point du cercle de diamètre $[AB]$. Le triangle ABM est alors rectangle en M.

Autrement dit, $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=(x_A-x)(x_B-x)+(y_A-y)(y_B-y)=0$.

D. *Barycentre*

<u>Théorème 11</u>:

Si G est le barycentre du système {(A, α)(B, β)(C, γ)}, alors : $G\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\\ \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\end{pmatrix}$.

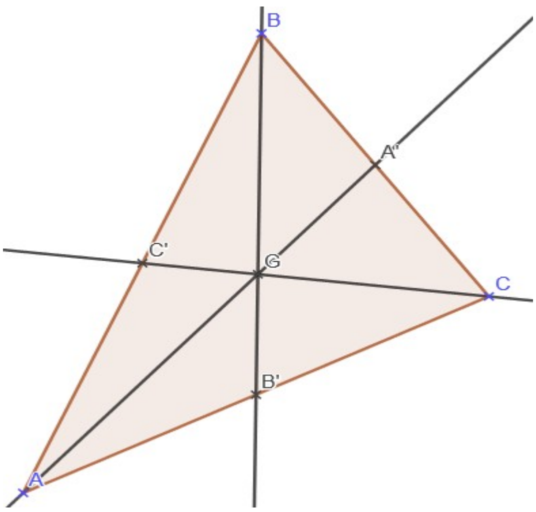
Démonstration:

Utiliser la propriété (9) en particularisant avec le point *O*, centre du repère orthonormé direct.

VI. Triangles et relations.

A. *Droites remarquables du triangle*

Dans toute la suite, ABC est un triangle non aplati.



<u>Théorème 12</u>:

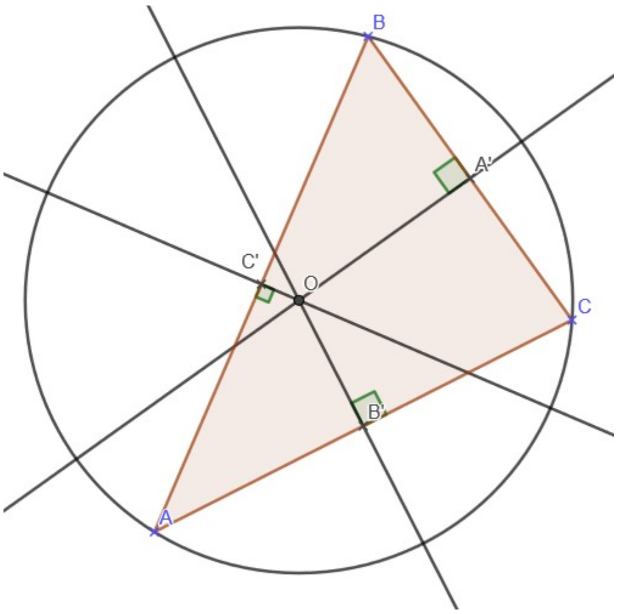
Les trois médianes issues de *A*, *B* et *C* sont concourantes au centre de gravité *G* du triangle *ABC*.

Démonstration:

On note *A′*, *B′* et *C′* les milieux respectifs des côtés [*BC*], [*AC*] et [*AB*]. On note (*AA′*), (*BB′*) et (*CC′*) les médianes issues respectivement des sommets *A*, *B* et *C*.

Soit *G* le centre de gravité de *ABC*, *G* est le barycentre de $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$. On sait que *A′* est le barycentre de $\{(B,1);(C,1)\}$. Donc par associativité du barycentre, *G* est barycentre de $\{(A,1);(A',2)\}$. Ainsi, $G\in(AA')$.

De manière analogue, on montre que $G\in(BB')$ et que $G\in(CC')$. D'où le résultat.



Théorème 13:

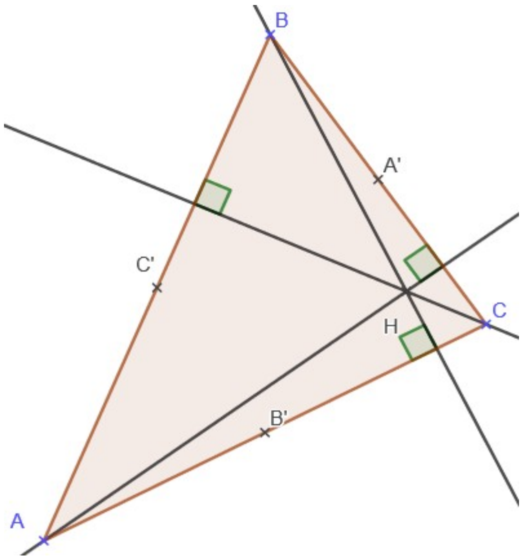
Les trois médiatrices sont concourantes au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

Démonstration:

On note $(m_{[AB]}),(m_{[BC]})$ et $(m_{[CA]})$ les médiatrices respectives des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Soit O le point d'intersection de $(m_{[AB]})$ et de $(m_{[BC]})$ (ce point existe sinon $(AB)/\!/(BC)$).

Alors : $\begin{array}{l} O\in(m_{[AB]}) \text{ donc } OA=OB, \\ O\in(m_{[BC]}) \text{ donc } OB=OC \end{array}$.

On en déduit que $OA=OC$ donc $O\in(m_{[CA]})$. Les médiatrices sont donc concourantes en un point O vérifiant $OA=OB=OC$ (centre du cercle circonscrit au triangle).



Théorème 14:

Les trois hauteurs sont concourantes au point H appelé orthocentre du triangle ABC.

Démonstration:

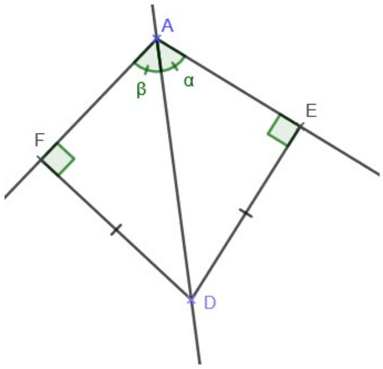
On note (h_A), (h_B) et (h_C) les hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C. Soit H le point défini par $\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$. (où O est le centre du cercle circonscrit à ABC).

Ainsi, $\vec{OH}=\vec{OA}+2\vec{OA'}$ (où A' est le milieu de $[BC]$). Autrement dit, $\vec{AH}=2\vec{OA'}$. Donc $\vec{AH}$ et $\vec{OA'}$ sont colinéaires. Donc H appartient à la parallèle à $(m_{[BC]})$ passant par A, d'où $H\in(h_A)$.

De même, H appartient aux deux autres hauteurs. Ainsi les hauteurs sont concourantes en H.

Définition:

La bissectrice d'un angle est la droite qui coupe cet angle en deux angles de même mesure.



Propriété 16:

Tout point situé sur la bissectrice d'un angle est à égale distance de chaque côté de cet angle.

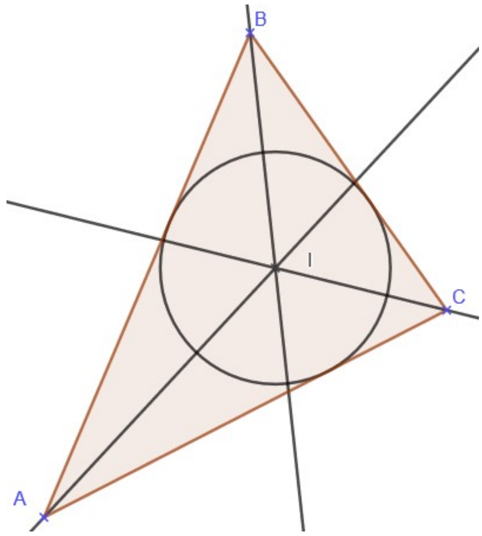
Réciproquement, tout point situé à égale distance des deux côtés d'un angle est sur la bissectrice de cet angle.

Démonstration:

Calculer les angles pour obtenir des triangles isométriques, donc des longueurs égales...

Théorème 15:

Les trois bissectrices sont concourantes au point I centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.



Démonstration:

On note $(b_A),(b_B) et (b_C)$ les bissectrices issues respectivement des sommets A, B et C. Soit $I=(b_A)\cap(b_B)$ (il existe, sinon contradiction d'angles alternes-internes égaux et de somme des angles égale à Π radians dans un triangle, les bissectrices ne peuvent pas être confondues non plus car le triangle est supposé non aplati).

- $I\in(b_A)$ donc $d(I,(AB))=d(I,(AC))$.
- $I\in(b_B)$ donc $d(I,(BA))=d(I,(BC))$.

Donc $d(I,(BC))=d(I,(AC))$, donc $I\in(b_C)$. Ainsi les bissectrices sont concourantes en un point I vérifiant : $d(I,(AB))=d(I,(BC))=d(I,(AC))$ (centre du cercle inscrit).

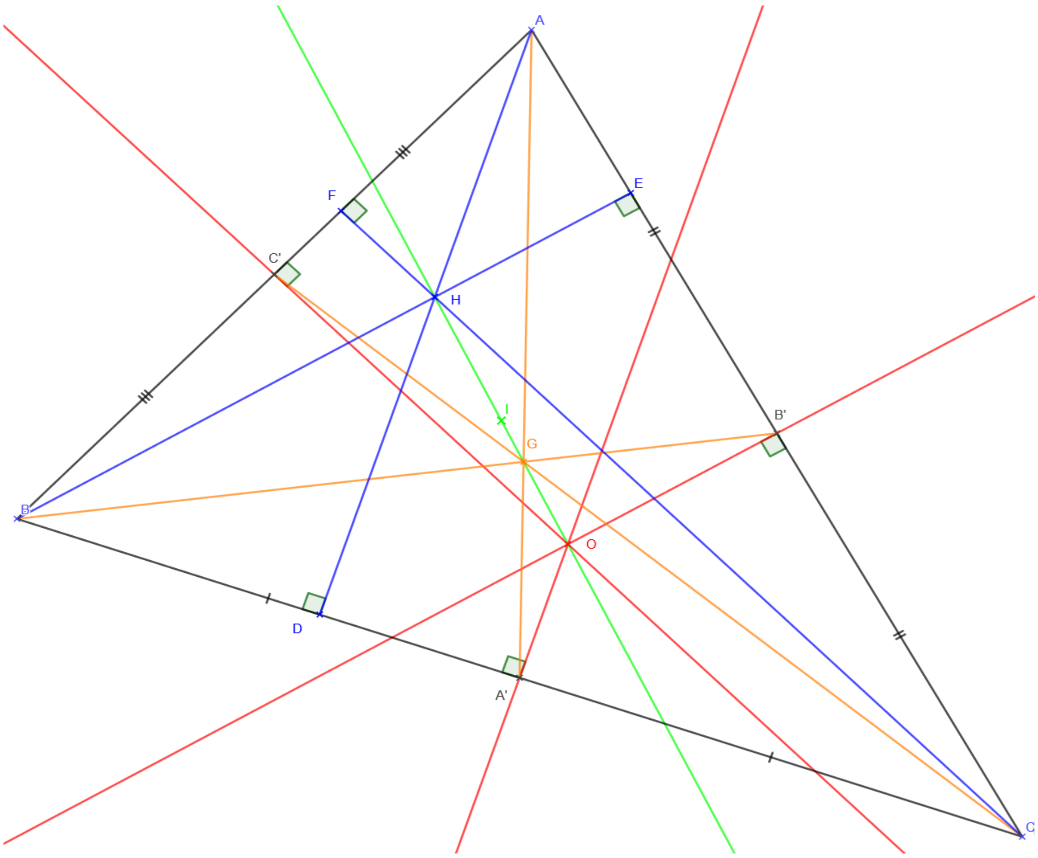
Exercice:

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On considère un point P intérieur au triangle ABC et tel que : $\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=\widehat{PBC}+\widehat{PCB}$.

Montrer que $AP\geqslant AI$ et que l'égalité n'est vérifiée que lorsque $P=I$.

Théorème 16 :

Les points G, H et O sont alignés. Dans le cas où ils ne sont pas confondus, ils définissent une droite appelée droite d'Euler.



Démonstration : Voir exercice qui suit …

Illustration : le point vert I est le centre du cercle d'Euler (voir exercice)

Exercice:

Soit ABC un triangle. On appelle A', B', C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$; D, E et F les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A, B et C et G le centre de gravité du triangle ABC.

1) On note O le centre du cercle C_1 circonscrit au triangle ABC et H le point défini par $\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC et que $\vec{OH}=3\vec{OG}$.

   Qu'en déduit-on pour les points O, G et H ?
2) On note I, M , N et P les milieux respectifs des segments $[OH]$, $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$. On appelle C_2 le cercle de centre I de rayon la moitié du rayon du cercle C_1.

   Démontrer que $\vec{IM}=\frac{1}{2}\vec{OA}=-\vec{IA'}$. En déduire que le segment $[MA']$ est un diamètre du cercle C_2.
3) Montrer que le point D appartient au cercle C_2.
4) Donner neuf points situés sur le cercle C_2 (il s'agit naturellement de nommer neuf points de la figure définis sans référence au cercle …)

B. *Théorème de Thalès, théorème de Menelaüs*

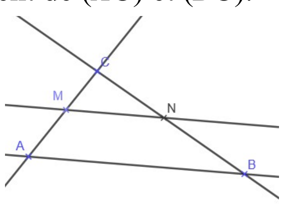
Définition: (Mesure algébrique)

Soit (d) une droite munie d'un repère $(O,\vec{i})$. Soit A et B deux points de (d). On définit la mesure algébrique de AB notée $\overline{AB}$ par : $\overline{AB}=\begin{cases} AB \text{ si } \vec{AB} \text{ est de même sens que } \vec{i} \\ -AB \text{ si } \vec{AB} \text{ et } \vec{i} \text{ sont de sens contraires}\end{cases}$.

Théorème 17: (Thalès).

Soient A, B et C trois points non alignés et M et N des points respectivement de (AC) et (BC).

1. Si $(MN)/\!/(AB)$ alors $\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{CB}}$ $\left(\text{ou } \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}\right)$
2. Si $\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{CB}}$, alors $(MN)/\!/(AB)$.



Remarque :

Cette version simplifiée par rapport à la version connue depuis la classe de 3e est simplifiée par la notion de mesure algébrique.

Théorème 18: (Menelaüs).

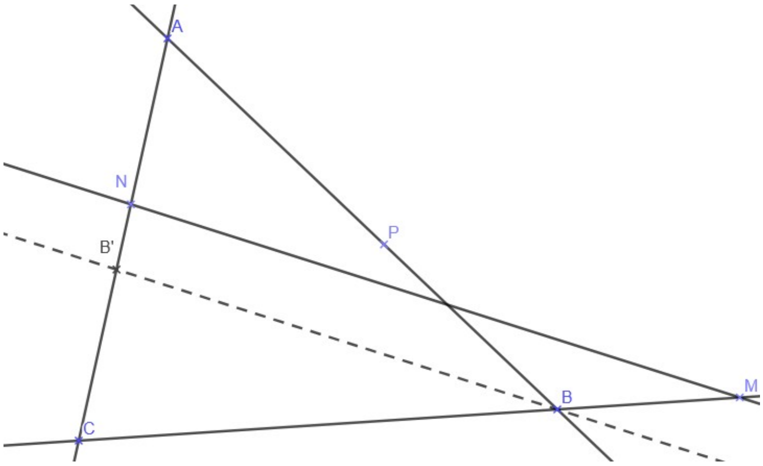
Soit A, B et C trois points non alignés. Soit M, N et P trois points appartenant respectivement à (BC), (AC) et (AB) distincts de A, B et C.

Les points M, N et P sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

Exercice:

- Démontrer le théorème de Menelaüs.

Indication: Par double implication. Introduire le point B' intersection de la parallèle (MN) passant par B et de (AC).



VII. Formules du triangle

Dans toute la suite, ABC est un triangle. On note a = BC, b = AC et c = AB (on suppose évidemment ces longueurs non nulles).

A. Formule des sinus et conséquences

Théorème 19: (Formule (ou loi) des sinus).

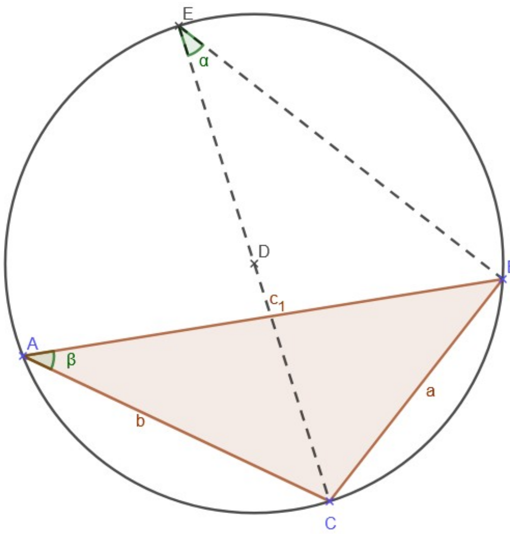
Si R est le rayon du cercle circonscrit à ABC, alors :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} = 2R \; .$$

Théorème 20: (Deuxième formule des sinus).

Si S est l'aire de ABC, alors :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} = \frac{abc}{2S} \; .$$



Démonstration: Découle de la formule des sinus car $S=\frac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC})$.

<u>Corollaire 1</u>:

Si S est l'aire de ABC et R le rayon du cercle circonscrit, alors $S=\frac{abc}{4R}$.

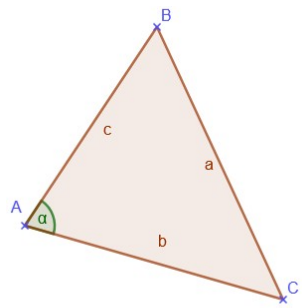
<u>Corollaire 2</u>:

Soit J le point d'intersection de la bissectrice issue de A avec (BC), alors $\frac{JB}{JC}=\frac{c}{b}$.

B. *Théorème d'Al-Kashi*

<u>Théorème 21</u>: (Théorème d'Al-Kashi).

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\widehat{BAC}) .$$



Démonstration: Calculer de deux manières différente un produit scalaire bien choisit.

C. *Formule de Héron*

<u>Théorème 22</u>: (Formule de Héron).

Si S est l'aire du triangle ABC et P le demi-périmètre du triangle ($P=\frac{a+b+c}{2}$), alors :

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} .$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2(\widehat{BAC}) \\
&= \frac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2(\widehat{BAC})) \\
&= \frac{1}{4}b^2c^2\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}b^2c^2-\frac{1}{16}(b^2+c^2-a^2)^2 \\
&= \frac{1}{16}[(2\mathrm{bc})^2-(b^2+c^2-a^2)]^2
\end{aligned}$$

Par le théorème d'Al-Kashi.

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{16}(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2)\\
&= \frac{1}{16}(a^2 - (b-c)^2)((b+c)^2 - a^2)\\
&= \frac{1}{16}(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)\\
&= \frac{1}{16}(2P-2b)(2P-2c)(2\mathrm{P}-2a)(2P)\\
&= (P-b)(P-c)(P-a)P
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

<u>Exercice</u>:

- Existe-t-il un triangle d'aire entière et dont les côtés sont des nombres premiers ?

Remerciements

Merci à M.Bernard Alexis, qui a réalisé un travail dont ce cours de géométrie est très largement inspiré.