# Géométrie plane

## I) Angles

### 1) Théorème de l'angle au centre, théorème de l'angle inscrit

**Théorème 1** (Théorème de l'angle au centre)**.**

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre $O$ et $A$, $B$ et $C$ trois points sur ce cercle.
Si les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ACB}$ interceptent le même arc, alors

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ACB}$$

**Corollaire 2** (Théorème de l'angle inscrit)**.**

Si quatre points deux à deux distincts $A$, $B$, $C$ et $D$ sont cocycliques, $C$ et $D$ étant du même côté de $(AB)$ alors $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.

*Démonstration.* Il s'agit d'un cas particulier du théorème de l'angle au centre. □

**Théorème 3** (Réciproque)**.**

Si quatre points deux à deux distincts $A$, $B$, $C$ et $D$ sont tels que $\widehat{ACB} = \widehat{ADC}$ et les points $C$ et $D$ sont du même côté de la droite $(AB)$ alors les quatre points sont cocycliques

*Démonstration.* Soit $C$ un point tel que $\widehat{BCA} = \alpha$. Par trois points donnés, il passe un cercle unique qui est le cercle circonscrit au triangle $ABC$. Soient $O$ le centre de ce cercle et $r$ son rayon.

D'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{BOA} = 2\alpha$. Soit $(OH)$ la médiatrice de $[AB]$. Le triangle $OAB$ est isocèle en $O$ donc $(OH)$ est également la bissectrice de l'angle $\widehat{BOA}$.

$$\sin\alpha = \frac{AH}{AO} = \frac{AB}{2r}, \text{ ce qui donne } r = \frac{AB}{2\sin\alpha}.$$

Ainsi le rayon du cercle circonscrit ne dépend que de la longueur $AB$ et de l'angle $\alpha$. Il ne dépend pas de la position du point $C$.

Soit $D$ un autre point tel que $\widehat{BDA} = \alpha$. Alors, d'après ce qui précède, $D$ appartient à un cercle de rayon $r$. Soit $\Omega$ le centre de ce cercle. $\Omega$ appartient à la médiatrice de $[AB]$, c'est-à-dire $(OH)$. Comme $\Omega A = r$, nécessairement, $\Omega = O$.

Ce qui démontre que $C$ et $D$ appartiennent à l'arc de cercle de centre $O$, de rayon $r$ et d'extrémités $A$ et $B$, autrement dit, les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont cocycliques. □

**Remarque :** On exclut le cas pathologique où $A$, $B$, $C$ et $D$ sont alignés.

### 2) Triangles semblables

**Définition 4.**

On dit que deux triangles sont **semblables** lorsque leurs angles sont égaux deux-à-deux.

**Théorème 5.**

Soit $ABC$ et $DEF$ deux triangles.

— Si $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$ alors les triangles $ABC$ et $DEF$ sont semblables et $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{FD}$.

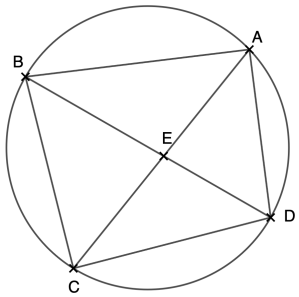
— Si $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{FD}$ alors les triangles $ABC$ et $DEF$ sont semblables et $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ ; $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$.

— Si $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{FD}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ alors les triangles $ABC$ et $DEF$ sont semblables.

★ *Exercice :*

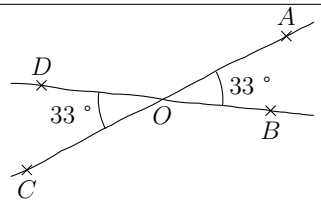
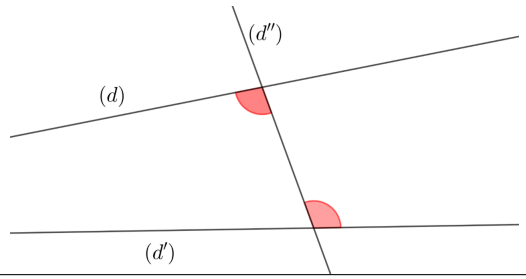
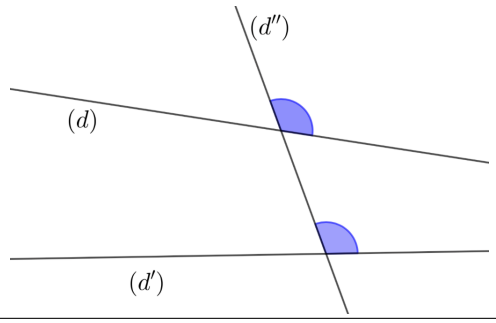
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle. Soit $E$ le point d'intersection de $(AC)$ et $(BD)$. Montrer que $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{BC}{AD}$.

***Solution.***




$A$ et $B$ sont du même côté que $(DC)$ et les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont cocycliques donc $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$.
Les angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{BEC}$ sont opposés par le sommet donc égaux.
Ainsi les triangles $AED$ et $BEC$ sont semblables.
Par correspondance des points, $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{BC}{AD}$.

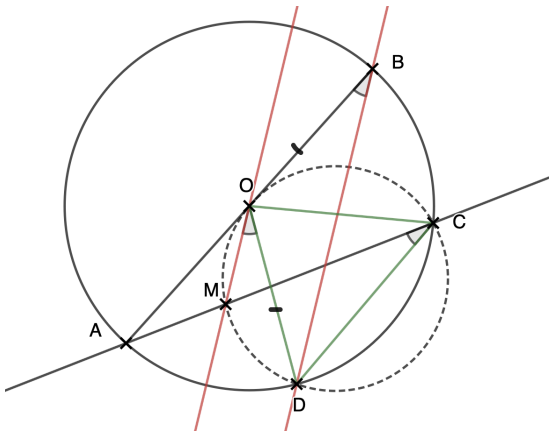
### 3) Angles alternes-internes, angles opposés par le sommet, angles correspondants

| **Vocabulaire** | **Propriété** | **Exemple** |
|---|---|---|
| Angles opposés par le sommet | Deux angles opposés par le sommet sont égaux. |   |
| Angles alternes-internes | Deux angles alternes-internes sont égaux si et seulement si $(d)$ et $(d')$ sont parallèles. |   |
| Angles correspondants | Deux angles correspondants sont égaux si et seulement si $(d)$ et $(d')$ sont parallèles. |   |

★ *Exercice :*

On considère quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ situés dans cet ordre sur un cercle de centre $O$ dont $[AB]$ est un diamètre.
Le cercle circonscrit au triangle $DOC$ recoupe en $M$ la droite $(AC)$. Montrer que $(MO)$ et $(DB)$ sont parallèles

***Solution.***




L'angle $\widehat{MOD}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{MD}$ du cercle circonscrit au triangle $DOC$. Il a donc la même mesure que l'angle $\widehat{DCM}$. Mais cet angle $\widehat{DCM}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{DA}$ du cercle de centre $O$, lequel est aussi intercepté par l'angle $\widehat{ABD}$, qui a même mesure que l'angle $\widehat{DCM}$. Or, le triangle $DOB$ est isocèle de sommet principal $O$ donc $\widehat{OBD} = \widehat{ODB}$. Nous sommes donc dans la situation d'angles alternes-internes égaux ($\widehat{MOD}$ et $\widehat{ODB}$) et les droites $(MO)$ et $(DB)$ sont parallèles.

# II) Transformations du plan

*Il faut penser à ajouter le cas pathologique ... l'identité est la translation de vecteur* $\overrightarrow{0}$*, la rotation d'angle* $0$*, l'homothétie de rapport* $1$*.*

## 1) Translation

**Définition 6.**

Soit $t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Soit $M$ un point du plan, l'image $M'$ de $M$ par la translation $t$ est défini par :

$$t(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}.$$

**Propriété(s) 7.**

- Les translations conservent le parallélisme, l'alignement, les angles orientés et les intersections.
- Les translations sont des isométries. Elles conservent donc les figures isométriquement (qui conserve les longueurs).
- Les translations ne possèdent pas de point invariant (tout bouge, sauf cas pathologique d'une translation de vecteur nul ... c'est nul !).
- L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle.
- La composée de deux translations de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
- La transformation réciproque de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$.

## 2) Rotations

**Définition 8.**

Soit $r$ la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$. Soit $M$ un point du plan, l'image $M'$ de $M$ par la rotation $r$ est défini par :

$$r(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \text{et} \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi] \end{cases}$$

**Propriété(s) 9.**

- Les rotations conservent le parallélisme, l'alignement, les angles orientés et les intersections.
- Les translations sont des isométries. Elles conservent donc les figures isométriquement.
- Le centre de la rotation est le seul point invariant (comme le Soleil !)
- L'image d'une droite $(d)$ par une rotation d'angle $\theta$ est une droite $(d')$ formant un angle $\theta$ avec $(d)$.
- La composée de deux rotations et d'angles $\theta$ et $\theta'$ est :
  - une translation si $\theta + \theta' = 0\,[2\pi]$ ;
  - une rotation d'angle $\theta + \theta'$ sinon.
- La transformation réciproque de la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ est la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $-\theta$.

## 3) Réflexions

**Définition 10.**

Soit $s$ la réflexion d'axe $\Delta$. Soit $M$ un point du plan, l'image $M'$ de $M$ par la réflexion $s$ est défini par :

$$s(M) = M' \iff \begin{cases} \Delta \text{ est la médiatrice de } [MM'] & \text{si } M \notin \Delta \\ M = M' & \text{si } M \in \Delta \end{cases}$$

**Propriété(s) 11.**

- Les réflexions conservent le parallélisme, l'alignement, les angles et les intersections.
- Les réflexions sont des isométries. Elles conservent donc les figures isométriquement (mais pas l'orientation !).
- Les points invariants sont les points de l'axe de la réflexion.
- L'image d'une droite $(d)$ par la réflexion d'axe $\Delta$ est une droite parallèle à $(d)$ si et seulement si $(d \parallel \Delta \quad \underline{\text{ou}} \quad d \perp \Delta)$.
- La composée $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ est :
  - la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ (avec $\overrightarrow{u}$ orthogonal à $\Delta$ et $\Delta'$ est l'image de $\Delta$ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}$) si $\Delta \parallel \Delta'$.
  - la rotation de centre $\Omega$ (point d'intersection de $\Delta$ et $\Delta'$) et d'angle $\theta$ ($\theta = 2 \times (\widehat{\Delta; \Delta'})$ ) si $\Delta$ et $\Delta'$ sont sécantes.
- Une réflexion est sa propre réciproque.

## 4) Homothéties

**Définition 12.**

Soit $h$ l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ (avec $k \neq 0$). Soit $M$ un point du plan, l'image $M'$ de $M$ par l'homothétie $h$ est défini par :

$$h(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k \times \overrightarrow{\Omega M}$$

**Propriété(s) 13.**

- Le centre d'une homothétie, un point et son image sont alignés.
- Les homothéties conservent le parallélisme, l'alignement, les angles orientés et les intersections.
- Les homothéties ne sont pas des isométries (suaf pour $k = 1$ ou $k = -1$). Elles multiplient les longueurs par $|k|$ et donc les aires par $k^2$. L'image d'une figure est une figure semblable.
- Le centre de l'homothétie est le seul point invariant.
- L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.
- La composée de deux homothéties de rapports $k$ et $k'$ est :
  - une translation si $kk' = 1$ ;
  - une homothétie de rapport $kk'$ sinon.
- La transformation réciproque de l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ est l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $\frac{1}{k}$.

★ *Exercice : (annale du concours général)*

Dans le plan, soit $A$, $B$, $C$ trois points distincts tels que $B$ soit sur le segment $[AC]$.
Soit $\Gamma$ le cercle de diamètre $[AC]$ et de centre $O_1$ (de rayon $R_1$), $\gamma$ le cercle de diamètre $[BC]$ et de centre $O_2$ (de rayon $R_2$), et $\Delta$ la tangente en $B$ à $\gamma$.

On suppose donné un cercle $\gamma'$ de centre $O_3$ (de rayon $R_3$) qui est tangent extérieurement à $\gamma$ en un point $D$, tangent à $\Delta$ en $E$, et tangent intérieurement à $\Gamma$ en $F$.

(1) Justifier que les droites $\Delta$ et $(CF)$ ne sont pas parallèles.
On note $G$ leur point d'intersection.

(2) Montrer qu'il existe une homothétie de centre $C$ qui transforme $\gamma$ en $\Gamma$ et une homothétie de centre $F$ qui transforme $\Gamma$ en $\gamma'$.

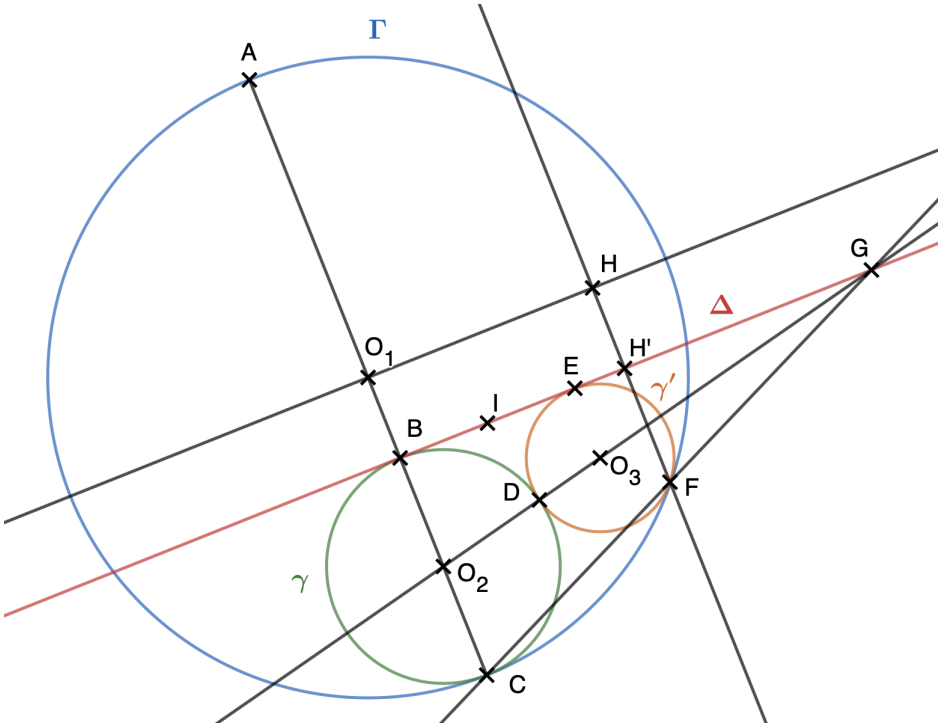
(3) Déterminer les centres des homothéties qui transforment $\gamma$ en $\gamma'$.

(4) Soit $I$ le milieu de $[BE]$.
Montrer que les points $A$, $I$, $D$ sont alignés sur une droite orthogonale à $(GD)$.

(5) Montrer que $AB = GD$.

(6) Exprimer le rayon $r'$ de $\gamma'$ en fonction des rayons $R$ et $r$ de $\Gamma$ et $\gamma$.

***Solution.***




(1) Soit $H$ le projeté orthogonal de $F$ sur la perpendiculaire à $(AC)$ passant par $O_1$.
$(FH)$ coupe $(BE)$ en $H'$.
$FH < FO_1 = O_1C$ (hypoténuse d'un triangle rectangle), donc $FH' < BC$, donc $BH'FC$ est un trapèze non parallélogramme et $\Delta$ et $(CF)$ sont sécantes.

(2) Soit $h$ l'homothétie de centre $C$ et qui transforme $B$ en $A$. Son rapport est $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{R_1}{R_2}$.
L'image par $h$ du cercle de diamètre $[BC]$ est le cercle de diamètre $[AC]$ donc l'image de $\gamma$ par $h$ est $\Gamma$. Cette homothétie convient.

Soit $h'$ l'homothétie de centre $F$ et qui transforme $O_1$ en $O_3$. Son rapport est $\dfrac{FO_3}{FO_1} = \dfrac{R_3}{R_1}$.
L'image par $h'$ du cercle de centre $O_1$ passant par $F$ est le cercle de centre $O_3$ passant par $F$ donc l'image de $\Gamma$ par $h'$ est $\gamma'$. Cette homothétie convient.

(3) Le rapport des rayons des deux cercles est $\dfrac{R_3}{R_2} \neq 1$, (car $R_3 < R_2$) donc les deux rapports possibles des homotéthies cherchées sont $\dfrac{R_3}{R_2}$ ou $-\dfrac{R_3}{R_2}$. Il n'y a donc que deux possibilités :

— $O_2$ a pour image $O_3$ et le rapport est $-\dfrac{R_3}{R_2}$. Posons $\Omega$ le centre de l'homothétie.

$$\overrightarrow{\Omega O_3} = -\frac{R_3}{R_2}\overrightarrow{\Omega O_2} \iff \Omega \text{ est le barycentre de } \{(O_3, R_2)(O_2, R_3)\} \iff \Omega = D.$$

L'homothétie de centre $D$ et de rapport $-\dfrac{R_3}{R_2}$ est donc l'unique homothétie de rapport $-\dfrac{R_3}{R_2}$ qui transforme $O_2$ en $O_3$. On vérifie qu'elle transforme $\gamma$ en $\gamma'$.

— $O_2$ a pour image $O_3$ et le rapport est $\dfrac{R_3}{R_2}$. De même, il existe une unique homothétie de rapport $\dfrac{R_3}{R_2}$ qui transforme $O_2$ en $O_3$.
Or, $\dfrac{R_1}{R_2} \times \dfrac{R_3}{R_1} = \dfrac{R_3}{R_2} \neq 1$, donc $h' \circ h$ est une homothétie de rapport $\dfrac{R_3}{R_2}$ et qui transforme $\gamma$ en $\gamma'$ (il suffit d'appliquer $h$ puis $h'$), donc $O_2$ en $O_3$.
$h' \circ h$ est donc l'unique homothétie de rapport $\dfrac{R_3}{R_2}$ qui transforme $\gamma$ en $\gamma'$.

Le centre de $h$ est $C$, donc la droite $(CF)$ est globalement invariante par $h$.
Le centre de $h'$ est $F$, donc $(CF)$ est globalement invariante par $h'$, donc $(CF)$ est globalement invariante par $h' \circ h$, donc elle contient le centre de $h' \circ h$.
L'image de $B$ est l'une des intersections de la parallèle à $(BO_2)$ passant par $O_3$ et de $\gamma'$. C'est $E$ car le rapport de l'homothétie est positif, donc $(BE)$ contient le centre de l'homothétie. Le centre de $h' \circ h$ est donc l'intersection de $(CF)$ et $(BE)$, c'est le point $G$.

*Remarque :* on en déduit de plus que $O_2$, $D$, $O_3$ et $G$ sont alignés.

(4) $C$, $D$ et $E$ sont alignés car $E$ est l'image de $C$ par l'homothétie de centre $D$ et de rapport $-\dfrac{R_3}{R_2}$. Par l'homothétie $h'$, l'image de $A$ est $E$ donc $A$, $E$ et $F$ sont alignés.
$F$ appartient au cercle de diamètre $[AC]$, donc $(AF)$ est perpendiculaire à $(CF) = (CG)$.

Dans le triangle $AGC$, on connaît donc deux hauteurs $(AF)$ et $(BG)$, qui se coupent en $E$. $(CE)$ est la troisième hauteur, elle est perpendiculaire à $(AG)$. $I$ est le milieu de $[BE]$ et $O_2$ de $[BC]$, donc $(IO_2) \parallel (EC)$, donc $(IO_2)$ est perpendiculaire à $(AG)$.

Dans le triangle $AGO_2$, on a donc deux hauteurs $(IO_2)$ et $(BG)$, qui se coupent en $I$. $(AI)$ est la troisième hauteur, elle est perpendiculaire à $(O_2O_3)$ donc à $(GD)$.

$(O_2I)$ est parallèle à $(CD)$ *déjà vu* et $(CD)$ est perpendiculaire à $(BD)$, car $D$ appartient au cercle de diamètre $[BC]$, donc $(O_2I)$ est perpendiculaire à $(BD)$ et comme $O_2$ est équidistant de $B$ et $D$, $(O_2I)$ est la médiatrice de $[BD]$, donc par symétrie par rapport à $(IO_2)$, $\widehat{O_2DI} = \widehat{O_2BI} = 90°$, donc $(ID)$ est perpendiculaire à $(O_3D) = (O_2O_3)$ donc $(AI)$ et $(ID)$, perpendiculaires à $(O_2O_3)$, sont confondues.

(5) $\widehat{AIB} = \widehat{DIG}$ (angles opposés par le sommet), $\widehat{ABG} = \widehat{IDG} = 90°$ donc ils sont semblables avec un côté égal $IB = ID$, donc ils sont isométriques, donc $AB = GD$.

(6) Soient $R_1$, $R_2$ et $R_3$ les rayons des cercles de centre $O_1$, $O_2$ et $O_3$.
$\gamma'$ est l'image de $\gamma$ par l'homothétie de centre $G$ de rapport $\dfrac{R_3}{R_2}$, donc

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{GO_3}{GO_2} = \frac{GD - R_3}{GD + R_2}.$$

Or, $GD = AB = 2R_1 - 2R_2$, donc

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{2R_1 - 2R_2 - R_3}{2R_1 - R_2} = \frac{2R_1 - 2R_2}{2R_1} = 1 - \frac{R_2}{R_1}$$

donc $R_3 = R_2\left(1 - \dfrac{R_2}{R_1}\right)$, soit avec les notations de l'énoncé :

$$r' = r\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

# III) Barycentres

**Définition 14.**

Etant donnés des points $A_1$, $A_2, \ldots,$ $A_n$ du plan et des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, il existe un unique point $G$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

Ce point est appelé barycentre des points $A_1$, $A_2, \ldots,$ $A_n$ affectés des coefficients (ou poids) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (on dit aussi du système $\{(A_1, \lambda_1) \ldots (A_n, \lambda_n)\}$).

**Remarque.** On parle d'isobarycentre lorsque les poids affectés à chaque point sont tous égaux.

*Exemple.* L'isobarycentre de deux points est le milieu de ce segment.

**Propriété(s) 15** (Commutativité et homogénéité du barycentre)**.**

Soit $G$ le barycentre du système $\{(A,a)(B,b)\}$.

*Commutativité.* $G$ est le barycentre du système $\{(B,b)(A,a)\}$.

*Homogénéité.* Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, $G$ est le barycentre du système $\{(A,ka)(B,kb)\}$.

*Démonstration.* — On a $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, donc $b\overrightarrow{GB} + a\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$.
— On a (car $k \neq 0$)

$$(k \times a)\,\overrightarrow{GA} + (k \times b)\,\overrightarrow{GB} = k \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

□

**Propriété(s) 16** (Formule de Leibniz)**.**

Si $G$ est le barycentre du système $\{(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)\}$, pour tout point $M$ du plan (ou de l'espace)

$$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} &= \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{MG} + \gamma\overrightarrow{GC} \\
&= \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}} + (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} \\
&= \overrightarrow{0} \quad + \quad (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}.$$

□

**Remarque.** Le barycentre de deux points est aligné avec ces deux points.

**Propriété(s) 17** (Associativité du barycentre)**.**

Soit $G$ le barycentre de $\{(A_1,\lambda_1)(A_2,\lambda_2)\dots(A_n,\lambda_n)\}$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \neq 0$.

Soit $m$ un entier tel que $1 \leqslant m \leqslant n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \neq 0$.

Si $G_m$ est le barycentre du système $\{(A_1,\lambda_1)\dots(A_m,\lambda_m)\}$ alors $G$ est le barycentre du système $\left\{\left(G_m, \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)(A_{m+1},\lambda_{m+1})\dots(A_n,\lambda_n)\right\}$.

*Démonstration.* Soit $M$ un point du plan. On a (par la propriété (16)) :

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)\overrightarrow{MG_m} = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overrightarrow{MA_i}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)\overrightarrow{MG_m} + \sum_{i=m+1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{MA_i} &= \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\overrightarrow{MA_i} + \sum_{i=m+1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{MA_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{MA_i} \\
&\overset{(16)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\overrightarrow{MG}
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

*Exemple.* $ABC$ est un triangle. On note $G$ l'isobarycentre des points $A$, $B$ et $C$.
Montrer que ce point $G$ est le centre de gravité du triangle.

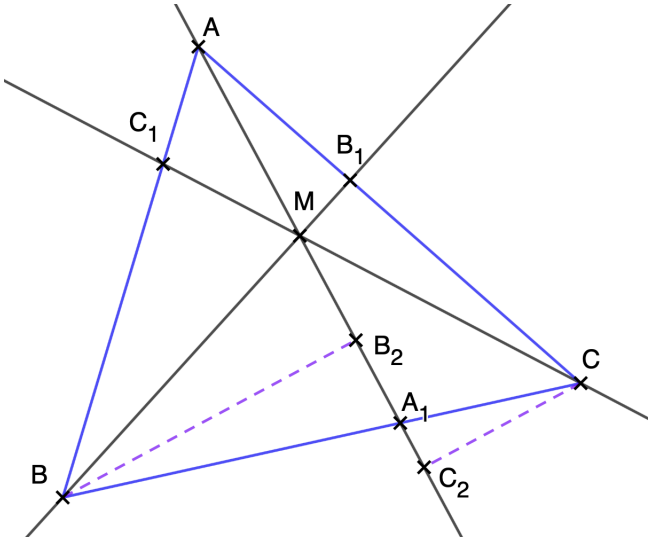
★ *Exercice :*

Soit $M$ un point intérieur au triangle $ABC$ (non aplati).
On désire montrer que $M$ est le barycentre de $\{(A, \mathcal{A}_{MBC})(B, \mathcal{A}_{MAC})(C, \mathcal{A}_{MAB})\}$.
Soit $A_1$, $B_1$ et $C_1$ les points d'intersection de $(AM)$, $(BM)$ et $(CM)$ avec $(BC)$, $(AC)$ et $(AB)$ respectivement.
Soit $B_2$ et $C_2$ les projetés orthogonaux de $B$ et $C$ sur $(AM)$.

(1) Montrer que $A_1$ est le barycentre de $\{(B, \mathcal{A}_{MAC})(C, \mathcal{A}_{MAB})\}$.

(2) Conclure.

***Solution.***




(1) $\mathcal{A}_{MAC} = \dfrac{AM \times CC_2}{2}$ et $\mathcal{A}_{MAB} = \dfrac{AM \times BB_2}{2}$. Ainsi, $\dfrac{CC_2}{BB_2} = \dfrac{\mathcal{A}_{MAC}}{\mathcal{A}_{MAB}}$.
Les triangles $BB_2A_1$ et $CC_2A_1$ sont semblables donc $\dfrac{CC_2}{BB_2} = \dfrac{A_1C}{A_1B}$.
Ainsi, $\dfrac{A_1C}{A_1B} = \dfrac{\mathcal{A}_{MAC}}{\mathcal{A}_{MAB}}$ .
Or $\dfrac{1}{A_1B}\overrightarrow{A_1B} = -\dfrac{1}{A_1C}\overrightarrow{A_1C}$ ($M$ est intérieur au triangle donc $A_1 \in [BC]$).
Donc

$$\frac{A_1C}{A_1B}\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathcal{A}_{MAC}}{\mathcal{A}_{MAB}}\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{0}$$

Donc

$$\mathcal{A}_{MAC}\overrightarrow{A_1B} + \mathcal{A}_{MAB}\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{0}$$

or $\mathcal{A}_{MAC} + \mathcal{A}_{MAB} \neq 0$ (car somme de réels strictement positifs), ainsi $A_1$ est le barycentre de $\{(B, \mathcal{A}_{MAC})(C, \mathcal{A}_{MAB})\}$.

(2) Soit $G$ le barycentre de $\{(A, \mathcal{A}_{MBC})(B, \mathcal{A}_{MAC})(C\mathcal{A}_{MAB})\}$ (la somme des coefficients est non nulle).
Or $A_1$ est le barycentre de $\{(B, \mathcal{A}_{MAC})(C, \mathcal{A}_{MAB})\}$.
Donc $G$ est le barycentre des points $A$ et $A_1$ donc $G$, $A$ et $A_1$ sont alignés.
On montre de même que $G$, $B$ et $B_1$ sont alignés.
Ainsi, $G = M$, le point d'intersection de $(AA_1)$ et $(BB_1)$.

**Propriété(s) 18** (Conservation du barycentre)**.**

Si $f$ désigne une transformation usuelle du plan *(translation, réflexion, rotation ou homothétie)* et $G$ le barycentre d'un système de points du plan, alors $f(G)$ est le barycentre de l'image de chacun des points du système.

★ *Exercice :*

A la fin du premier trimestre, Noé s'aperçoit qu'il a obtenu 2 points de moins que Lila à chaque contrôle de mathématiques.
Lila a obtenu les notes $(11, 8, 15, 10)$ affectées respectivement des coefficients $(3, 2, 4, 1)$.
Déterminer la moyenne de mathématiques du premier trimestre de Noé.

***Solution.*** Les notes de Lila correspondent aux abscisses des points $A$, $B$, $C$ et $D$ :

$$A(11) \quad ; \quad B(8) \quad ; \quad C(15) \quad ; \quad D(10).$$

Les coefficients de ces notes étaient données par le système :

$$S = \{(A, 3)(B, 2)(C, 4)(D, 1)\}.$$

Les notes coefficientées de Noé sont alors

$$(9, 3) \quad ; \quad (6, 2) \quad ; \quad (13, 4) \quad ; \quad (8, 1).$$

Sur une droite graduée $(O, \overrightarrow{i})$, les notes de Noé sont obtenues par la translation $t$ de vecteur $-2\overrightarrow{i}$. La moyenne de Lila est l'abscisse du barycentre $G_L$ du système $S$ et par conservation du barycentre, $t(G_L) = G_N$ où $N$ est le barycentre du système

$$S' = \{(t(A), 3)(t(B), 2)((t(C), 4)(t(D), 1)\}.$$

Donc la moyenne de Noé est $\bar{x}_N$ donnée par $\bar{x}_N = \bar{x}_L - 2$ où $\bar{x}_L$ est la moyenne de Lila. D'où :

$$\begin{aligned} \bar{x}_N &= \bar{x}_L - 2 \\ &= \frac{3 \times 11 + 2 \times 8 + 4 \times 15 + 1 \times 10}{10} - 2 \\ &= 11,9 - 2 \\ &= 9,9 \end{aligned}$$

# IV) Produit scalaire

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

**Définition 19** (Définitions du produit scalaire)**.**

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. Soit $\overrightarrow{w}$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \pm \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$$

Le signe est déterminé par le sens des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

**Propriété(s) 20.**

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs et $k \in \mathbb{R}$.

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$ ;
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ ;
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ ;
- $(k\,\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = k\,(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (k\,\overrightarrow{v})$ ;
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$ ;
- $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$ ;
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$.

Attention aux différentes notations, $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

**Théorème 21** (Théorème de la médiane)**.**

Soit $A$ et $B$ deux points et $I$ le milieu de $[AB]$.
Pour tout point $M$ du plan, on a

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\
&= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\
&= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\
&= 2\,\overrightarrow{MI}^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 \\
&= 2MI^2 + \frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 \\
&= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2
\end{aligned}$$

□

*Exemple.* Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que $MA^2 + MB^2 = 4$ où $A$ et $B$ sont deux points du plan avec $AB = 2$.

Par le théorème de la médiane, en notant $I$ le milieu de $[AB]$, on a :

$$2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad MI^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad MI = 1$$

L'ensemble des points $M$ est le cercle de centre $I$ et de rayon 1.

# V) Géométrie analytique

On se place dans un repère orthonormé direct du plan.

## 1) Parallélisme et orthogonalité

**Théorème 22.**

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

**Rappel.** Deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

**Théorème 23.**

Soit $D \ : \ y = mx + p$ et $D' \ : \ y = m'x + p'$.

$$D \parallel D' \qquad \Leftrightarrow \qquad m = m'$$

$$D \perp D' \qquad \Leftrightarrow \qquad m \times m' = -1$$

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad xx' + yy' = 0.$$

*Démonstration.* Un vecteur directeur de $D$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de $D'$ est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$.

— $D$ et $D'$ sont parallèles ssi deux vecteurs qui les dirigent sont colinéaires.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ssi $1 \times m' - 1 \times m = 0$, *i.e.* $m' = m$.

— $D$ et $D'$ sont perpendiculaires ssi deux vecteurs qui les dirigent sont orthogonaux.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux ssi $1 \times 1 + m \times m' = 0$, *i.e.* $m \times m' = -1$.

□

## 2) Distance d'un point à une droite

**Théorème 24.**

Soient $D : ax + by + c = 0$ et $A(x_A, y_A)$.

$$d(A, D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

*Démonstration.* Soient $M(x, y) \in D$, $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $D$ (il est donné par $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$) et $H \in D$ le pied de la hauteur issue de $A$. Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}$ de deux façons :

$$|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}| = |a(x - x_A) + b(y - y_B)| = |ax_A + by_B + c|.$$

$$|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}| = AH \times \|\overrightarrow{n}\| = AH \times \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On en déduit que $d(A, D) = AH = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. □

## 3) Cercle

**Théorème 25.**

Le cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ est de rayon $R \geqslant 0$ a pour équation :

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2.$$

Le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ a pour équation :

$$(x - x_A)(x - x_b) + (y - y_A)(y - y_b) = 0$$

*Démonstration.* Démontrons la deuxième partie du théorème.
Soit $M(x, y)$ un point du cercle de diamètre $[AB]$. Le triangle $ABM$ est alors rectangle en $M$. Autrement dit, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) = 0$. □

## 4) Barycentre

**Théorème 26.**

Si $G$ est le barycentre du système $\{(A, \alpha)(B, \beta)(C, \gamma)\}$, alors

$$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} ; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}\right).$$

*Démonstration.* Utiliser la propriété (16) en particularisant avec le point $O$, centre du repère orthonormé direct. □

# VI) Triangles et droites remarquables

**Dans toute la suite, $ABC$ est un triangle non aplati.**

## 1) Droites remarquables du triangle

**Théorème 27.**

Les trois médianes issues de $A$, $B$ et $C$ sont concourantes au centre de gravité du triangle $ABC$.

*Démonstration.* On note $A'$, $B'$ et $C'$ les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
On note $m_A$, $m_B$ et $m_C$ les médianes issues respectivement des sommets $A$, $B$ et $C$.
Soit $G$ le centre de gravité de $ABC$, $G$ est le barycentre de $\{(A,1)(B,1)(C,1)\}$.
Or $A'$ est le barycentre de $\{(B,1)(C,1)\}$. Donc par associativité du barycentre, $G$ est barycentre de $\{(A,1)(A',2)\}$.
Ainsi, $G \in m_A$.
De manière analogue, on montre que $G \in m_B$ et que $G \in m_C$. D'où le résultat. □

**Théorème 28.**

Les trois médiatrices sont concourantes au centre $O$ du cercle circonscrit au triangle $ABC$.

*Démonstration.* On note $m_{[AB]}$, $m_{[BC]}$ et $m_{[CA]}$ les médiatrices respectives des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.
Soit $O$ le point d'intersection de $m_{[AB]}$ et $m_{[BC]}$ (ce point existe sinon $(AB) \parallel (BC)$ ...).
$O \in m_{[AB]}$ donc $OA = OB$.
$O \in m_{[BC]}$ donc $OB = OC$.
On en déduit que $OA = OC$ donc $O \in m_{[CA]}$. Les médiatrices sont donc concourantes en un point $O$ vérifiant $OA = OB = OC$ (centre du cercle circonscrit au triangle). □

**Théorème 29.**

Les trois hauteurs sont concourantes au point $H$ appelé orthocentre du triangle $ABC$.

*Démonstration.* On note $h_A$, $h_B$ et $h_C$ les hauteurs issues respectivement des sommets $A$, $B$ et $C$.
Soit $H$ le point défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (où $O$ est le centre du cercle circnscrit à $ABC$).
Ainsi, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$ (où $A'$ est le milieu de $[BC]$).
Autrement dit, $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$. Donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires. Donc $H$ appartient à la parallèle à $m_{[BC]}$ passant par $A$, d'où $H \in h_A$.
De même, $H$ appartient aux deux autres hauteurs. Ainsi les hauteurs sont concourantes en $H$. □

**Définition 30.**

La bissectrice d'un angle est la droite qui coupe cet angle en deux angles égaux.

**Propriété(s) 31.**

Tout point situé sur la bissectrice d'un angle est à égale distance de chaque côté de cet angle. Réciproquement, tout point situé à égale distance des deux côtés d'un angle est sur la bissectrice de cet angle.

*Démonstration.* Calculer les angles pour obtenir des triangles égaux, donc des longueurs égales... □

**Théorème 32.**

Les trois bissectrices sont concourantes au point $I$ centre du cercle inscrit dans le triangle $ABC$.

*Démonstration.* On note $b_A$, $b_B$ et $b_C$ les bissectrices issues respectivement des sommets $A$, $B$ et $C$.
Soit $I = b_A \cap b_B$ (*il existe, sinon contradiction d'angles alternes-internes égaux et de somme des angles égale à* $180°$ *dans un triangle, les bissectrices ne peuvent pas être confondues non plus car le triangle est supposé non aplati*).
$I \in b_A$ donc $d(I,(AB)) = d(I,(AC))$.
$I \in b_B$ donc $d(I,(BA)) = d(I,(BC))$.
Donc $d(I,(BC)) = d(I,(AC))$.
Or, $I$ est intérieur à l'angle $\widehat{BCA}$, donc $I \in b_C$.
Ainsi les bissectrices sont concourantes en un point $I$ vérifiant $d(I,(AB)) = d(I,(BC)) = d(I,(AC))$ (centre du cercle inscrit). □

★ *Exercice :*

Soit $ABC$ un triangle et $I$ le centre de son cercle inscrit. On considère un point $P$ intérieur au triangle $ABC$ et tel que : $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$.
Montrer que $AP \geqslant AI$ et que l'égalité n'est vérifiée que lorsque $P = I$.

***Solution.*** Posons $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$ et $\widehat{ACB} = \gamma$.
On a alors

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} + \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \beta + \gamma$$

La condition du problème est donc équivalente à

$$\widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \frac{\beta+\gamma}{2}$$

i.e.

$$\begin{aligned}\widehat{BPC} &= 180 - \frac{\beta+\gamma}{2}\\ &= 180 - \frac{180-\alpha}{2}\\ &= 90 - \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\widehat{BIC} = 180 - \dfrac{\beta+\gamma}{2}$. D'où $\widehat{BPC} = \widehat{BIC}$.

Puisque $P$ et $I$ sont du même côté de $(BC)$ et que $\widehat{BPC} = \widehat{BIC}$, les quatre points $B$, $C$, $P$ et $I$ sont cocycliques. Autrement dit, $P$ appartient au cercle circonscrit $\mathcal{C}_2$ du triangle $BCI$.

La droite $(AI)$ recoupe le cercle circonscrit $\mathcal{C}_1$ à $ABC$ (de centre $O$) en un point $O'$ : on va montrer que ce point $O'$ est le centre du cercle circonscrit $\mathcal{C}_2$ à $BIC$.

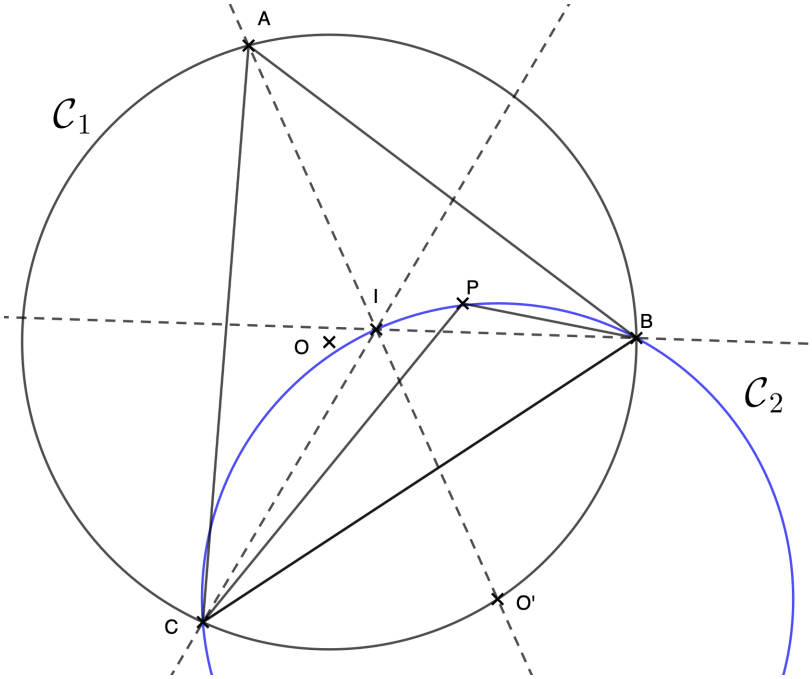
$\widehat{O'AC} = \widehat{O'AB} = u$ (puisque $(AI)$=$(AO')$ est la bissectrice de l'angle en $A$ de $ABC$), on a $\widehat{O'OC} = 2u = \widehat{O'OB}$ et ainsi les deux triangles $BOO'$ et $COO'$ sont semblables (un angle, deux côtés) et $O'B = O'C$.

On a :

$$\widehat{ICO'} = \frac{c}{2} + \widehat{BCO'} = \frac{c}{2} + \widehat{BAO'}, \quad \text{donc} \quad \widehat{ICO'} = \frac{c}{2} + \frac{a}{2} = \widehat{O'IC},$$

(*tracer la parallèle à* $(AC)$ *et utiliser les propriétés des angles alternes-internes et correspondants*), et ainsi $IO'C$ est isocèle en $O'$ et $O'C = O'I$.
Toujours est-il que $O'B = O'C = O'I$, et $O'$ est bien le centre du cercle $\mathcal{C}_2$ circonscrit à $BCI$.
Comme $P$ est sur ce cercle, on a $O'P = O'I$, ce qui va permettre de terminer.

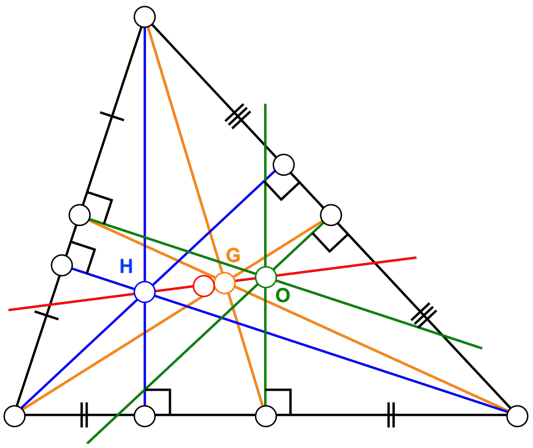
En effet $AO' = AI + IO' = AI + PO'$ et $AO' \leqslant AP + PO'$ (inégalité triangulaire), donc on a bien $AI \leqslant AP$.
Si $P = I$, on a évidemment $AP = AI$ ; réciproquement, si $AP = AI$, alors $AI + IO' = AP + PO'$, soit $AO' = AP + PO'$, donc $P$ est sur le segment $[AO']$ (cas d'égalité de l'inégalité triangulaire) et donc $P = I$, puisque $AP = AI$ et $P$ et $I$ sont sur $[AO']$. On a bien $AP = AI$ si et seulement si $P = I$.




**Théorème 33.**
Les points $G$, $H$ et $O$ sont alignés.
Dans le cas où ils ne sont pas confondus, ils définissent une droite appelée droite d'Euler.

*Démonstration.* Voir exercice qui suit ... □

*Illustration :* le point rouge est le centre du cercle d'Euler (voir exercice)




★ *Exercice :*

Soit $ABC$ un triangle. On appelle :
— $A'$, $B'$, $C'$ les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ ;
— $D$, $E$ et $F$ les pieds des hauteurs du triangle $ABC$ issues respectivement de $A$, $B$ et $C$ ;
— $G$ le centre de gravité du triangle $ABC$.

(1) On note $O$ le centre du cercle $\mathcal{C}_1$ circonscrit au triangle $ABC$ et $H$ le point défini par

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Montrer que $H$ est l'orthocentre du triangle $ABC$ et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
Qu'en déduit-on pour les points $O$, $G$ et $H$ ?

(2) On note $I$, $M$, $N$ et $P$ les milieux respectifs des segments $[OH]$, $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$.
On appelle $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre $I$ de rayon la moitié du rayon du cercle $\mathcal{C}_1$.
Démontrer que $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{IA'}$.
En déduire que le segment $[MA']$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_2$.

(3) Montrer que le point $D$ appartient au cercle $\mathcal{C}_2$.

(4) Donner neuf points situés sur le cercle $\mathcal{C}_2$ (il s'agit naturellement de nommer neuf points de la figure définis sans référence au cercle ...).

***Solution.***

(1) $(OA')$ est la médiatrice de $[BC]$. Il est clair (règle du parallélogramme) que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$ et la relation $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ peut alors s'écrire : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.
Or, $(OA') \perp (BC)$ et (on vient de voir que) $(OA') \parallel (AH)$, donc le point $H$ est situé sur la hauteur issue de $A$.
On montrerait évidemment de même que $H$ est situé sur les hauteurs issues de $B$ et $C$.
$H$ est donc à l'intersection des hauteurs du triangle $ABC$ : $H$ n'est autre que l'orthocentre de ce triangle.

Par la relation de Chasles, on a

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{OH} & = & \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\
 & = & (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}) \\
 & = & 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \\
 & = & 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{OH} & = & 3\overrightarrow{OG}
\end{array}$$

On en déduit que les points $O$, $G$ et $H$ sont alignés.

(2) Dans le triangle $HAO$, $M$ est le milieu de $[HA]$ et $I$ est le milieu de $[OH]$, d'après le théorème de la droite des milieux, $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.

De plus,

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{IM} & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \\
 & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \\
 & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA}\right) \\
 & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}\right) \\
 & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \\
 & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} - \frac{1}{2} \times 2\overrightarrow{OA'} \\
 & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA'} \\
 & = & -\overrightarrow{IO} - \overrightarrow{OA'} \\
 & = & \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{A'O} \\
 & = & \overrightarrow{A'I} \\
 & = & -\overrightarrow{IA'}
\end{array}$$

D'où le résultat.
Comme $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{A'I}$, $I$ est le milieu de $[A'M]$ donc c'est un diamètre de $\mathcal{C}_2$.

(3) Le triangle $MDA'$ est rectangle en $D$ et $[MA']$ est un diamètre de $\mathcal{C}_2$ donc $D \in \mathcal{C}_2$.

(4) Le cercle $\mathcal{C}_2$ passe par :
- les trois milieux $A'$, $B'$ et $C'$ côtés du triangle $ABC$ ;
- les trois pieds $D$, $E$ et $F$ des hauteurs du triangle $ABC$ ;
- les trois milieux des segments reliant les sommets à l'orthocentre $H$ du triangle $ABC$.

## 2) Théorème de Thalès, théorème de Menelaüs

**Définition 34** (Mesure algébrique)**.**

Soit $(d)$ une droite munie d'un repère $(O, \overrightarrow{i})$. Soit $A$ et $B$ deux points de $(d)$.
On définit la **mesure algébrique** de $AB$ notée $\overline{AB}$ par :

- ▷ $\overline{AB} = AB$ si $\overrightarrow{AB}$ est de même sens que $\overrightarrow{i}$ ;
- ▷ $\overline{AB} = -AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{i}$ sont de sens contraires.

**Théorème 35** (Thalès)**.**

Soit $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés et $M$ et $N$ des points respectivement de $(AC)$ et $(BC)$.
Si $(MN)$ est parallèle à $(AB)$ alors $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{CB}}$ (ou $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$ ).
Si $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{CB}}$, alors $(MN)$ est parallèle à $(AB)$.

*Remarque.* Cette version simplifiée par rapport à la version connue depuis la classe de 3e est facilitée par la notion de mesure algébrique.

**Théorème 36** (Menelaüs)**.**

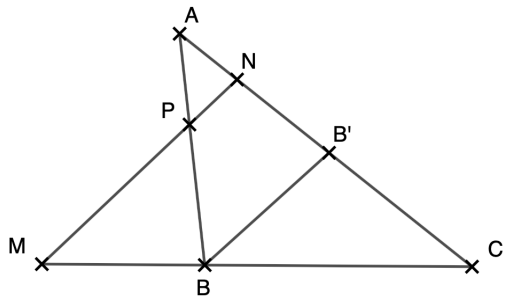
Soit $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés.
Soit $M$, $N$ et $P$ trois points appartenant respectivement à $(BC)$, $(AC)$ et $(AB)$ distincts de $A$, $B$ et $C$.
Les points $M$, $N$ et $P$ sont alignés si et seulement si $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

★ *Exercice :*

Démontrer le théorème de Menelaüs[1].

*Indication.* Par double implication. Introduire le point $B'$ intersection de la parallèle $(MN)$ passant par $B$ et de $(AC)$.

***Solution.*** Soit $B'$ l'intersection de la parallèle $(MN)$ passant par $B$ et de $(AC)$.




$\underline{\Rightarrow :}$ Supposons que les points $M$, $N$ et $P$ sont alignés.
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NB'}}{\overline{NC}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB'}}$$

Ainsi,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{NB'}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{AN}}{\overline{NB'}} = 1$$

1. Ménélaüs d'Alexandrie (fin du Ier siècle), membre de l'université d'Alexandrie, puis astronome à Rome. Beaucoup d'écrits n'ont pas survecus au temps ... Il étudie les triangles sphériques, l'astronomie et les premiers résultats de trigonométrie sphérique.

# VII) Formules du triangle

Dans toute la suite, $ABC$ est un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ (on suppose évidemment ces longueurs non nulles).

## 1) Formule des sinus et conséquences

**Théorème 37** (Formule (ou loi) des sinus)**.**
Si $R$ est le rayon du cercle circonscrit à $ABC$, alors

$$\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} = 2R.$$

**Théorème 38** (Deuxième formule des sinus)**.**
Si $S$ est l'aire de $ABC$, alors

$$\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} = \frac{abc}{2S}.$$

*Démonstration.* Découle de la formule des sinus car $S = \frac{1}{2}\, b\, c \sin(\widehat{BAC})$. □

**Corollaire 39.**
Si $S$ est l'aire de $ABC$ et $R$ le rayon du cercle circonscrit, alors

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

**Corollaire 40.**
Soit $J$ le point d'intersection de la bissectrice issue de $A$ avec $(BC)$, alors

$$\frac{JB}{JC} = \frac{c}{b}.$$

## 2) Théorème d'Al-Kashi

**Théorème 41** (Théorème d'Al-Kashi)**.**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos(\widehat{BAC}).$$

## 3) Formule de Héron

**Théorème 42** (Formule de Héron)**.**
Si $S$ est l'aire du triangle $ABC$ et $\mathcal{P}$ le demi-périmètre du triangle ($\mathcal{P} = \frac{a+b+c}{2}$), alors

$$S = \sqrt{\mathcal{P}(\mathcal{P}-a)(\mathcal{P}-b)(\mathcal{P}-c)}.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2(\widehat{BAC}) \\
&= \frac{1}{4}b^2c^2\left(1-\cos^2(\widehat{BAC})\right) \\
&= \frac{1}{4}b^2c^2\left(1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right) \qquad \text{par le théorème d'Al-Kashi} \\
&= \frac{1}{4}b^2c^2-\frac{1}{16}(b^2+c^2-a^2)^2 \\
&= \frac{1}{16}\left[(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2\right] \\
&= \frac{1}{16}(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2) \\
&= \frac{1}{16}(a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2) \\
&= \frac{1}{16}(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a) \\
&= \frac{1}{16}(2\mathcal{P}-2b)(2\mathcal{P}-2c)(2\mathcal{P}-2a)(2\mathcal{P}) \\
&= (\mathcal{P}-b)(\mathcal{P}-c)(\mathcal{P}-a)\mathcal{P}
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

★ *Exercice :*

Existe-t-il un triangle d'aire entière et dont les côtés sont des nombres premiers ?

***Solution.*** La formule de Héron [2] permet d'écrire que

$$16S^2 = (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a).$$

Puisque $16S^2$ est pair, on en déduit que le produit dans le membre de droite l'est aussi.
Sans perte de généralité, supposons que $a \leqslant b \leqslant c$.
Par disjonction de cas ($a$, $b$ et $c$ sont premiers, distinguons les cas avec 2) :

- Si $a = b = c = 2$, alors $16S^2 = 48$, d'où $S^2 = 3$, ce qui est impossible.
- Si $a$, $b$ et $c$ sont impairs, alors le produit du membre de droite est impair, ce qui est impossible.
- Si $a = b = 2$ et $c$ est impair, alors le produit du membre de droite est impair, ce qui est impossible.
- Si $a = 2$ et $b$ et $c$ sont impairs, par l'inégalité triangulaire, $c < 2 + b$ mais $b \leqslant c$ donc

$$b \leqslant c < 2 + b$$

  On en déduit que $0 \leqslant c - b < 2$, impossible car $c - b$ pair.

Ainsi, il n'existe pas de triangle d'aire entière dont les côtés sont des nombres premiers.

2. Héron d'Alexandrie (fin du Ier siècle après J.-C.) sans doute égyptien. Il travaille avant tout la géométrie et ses applications pratiques.