

Géométrie plane

I. Angles.

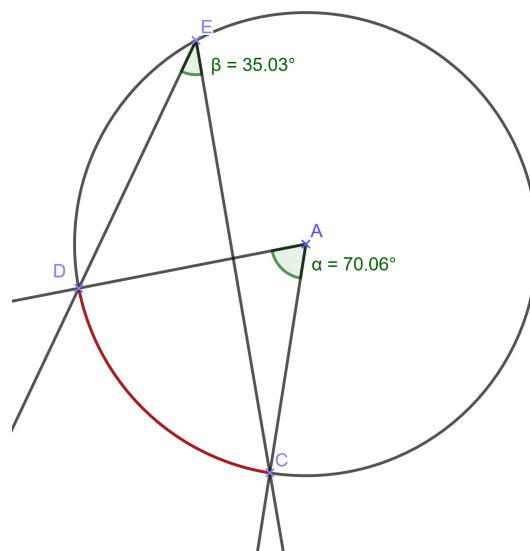
Propriété 1: La somme des angles d'un triangle vaut Π radians.

A. Angles au centre, angles inscrits.

Vocabulaire:

Considérons le cercle de centre A ci-contre.

- $\widehat{DAC}$ est l'angle au centre qui intercepte l'arc $\widehat{DC}$.
- $\widehat{DEC}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\widehat{DC}$.



Théorème 1: (de l'angle au centre)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre A et C, D et E trois points du cercle. Si les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{DEC}$ interceptent le même arc de cercle, alors $\widehat{DAC} = 2 \times \widehat{DEC}$

Théorème 2: (de l'angle inscrit)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre A et B, C, D et E quatre points du cercle. Si les angles $\widehat{DBC}$ et $\widehat{DEC}$ interceptent le même arc de cercle, alors $\widehat{DBC} = \widehat{DEC}$

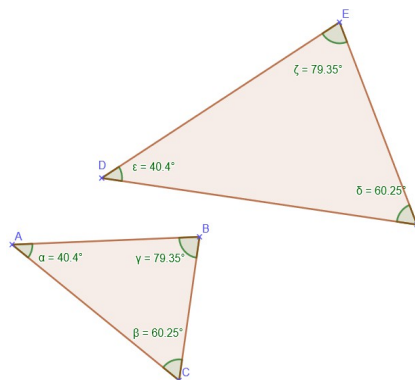
Théorème 3: (réciproque de l'angle inscrit)

Soit B, C, D et E quatre points deux à deux distincts. Si $\widehat{DBC} = \widehat{DEC}$ et les points B et E sont du même côté de la droite (DC) , alors les quatre points sont cocycliques.

B. Triangles semblables.

Définition:

On dit que deux triangles sont semblables si leurs angles ont la même mesure deux à deux.



Théorème 4: (des triangles semblables)

Soient ABC et DEF , deux triangles.

1. Si $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$, alors les triangles sont semblables et $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$,
2. Si $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, alors les triangles sont semblables et $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$,
3. Si $\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{FD}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$, alors les triangles sont semblables.

Exercice:

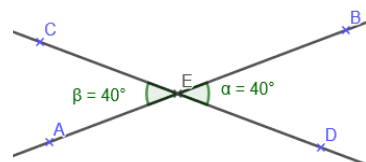
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle et E le point d'intersection de (AC) et (BD) .

- Montrer que $\frac{EB}{EA} = \frac{BC}{AD}$.

C. Angles alternes, correspondants et opposés.

Vocabulaire: (cas de deux droites sécantes)

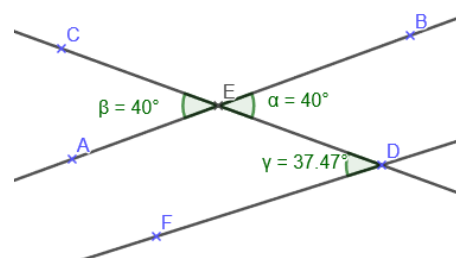
$\widehat{CEA} = \widehat{BED}$ sont des angles opposés par le sommet.



Vocabulaire: (cas de deux droites coupées par une troisième)

$\widehat{FDE} = \widehat{BED}$ sont des angles alternes-internes.

$\widehat{CEA} = \widehat{FDE}$ sont des angles correspondants.



Propriété 2:

- Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
- Deux angles alternes-internes ont la même mesure si et seulement si $(d) \parallel (d')$.
- Deux angles correspondants ont la même mesure si et seulement si $(d) \parallel (d')$.

Exercice:

On considère quatre points A, B, C et D situés dans cet ordre sur un cercle de centre O dont $[AB]$ est un diamètre. Le cercle circonscrit au triangle DOC recoupe (AC) en M .

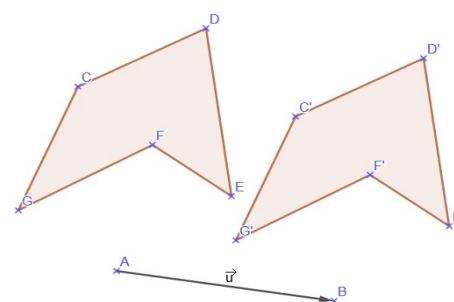
➤ Montrer que $(MO) \parallel (DB)$.

II. Transformations du plan.

A. Translations.

Définition:

Soit un vecteur $\vec{u}$ du plan. La translation t de vecteur $\vec{u}$ transforme le point M en point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Propriété 3:

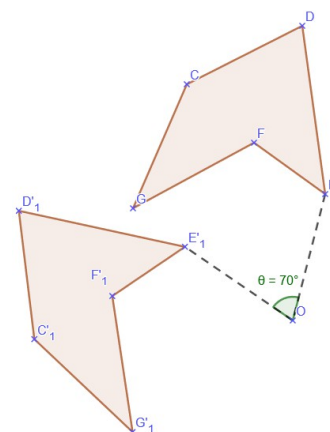
- Les translations conservent le parallélisme, l'alignement et les angles orientés.
- Les translations sont des isométries (elles conservent les longueurs).
- Les translations ne possèdent pas de point invariant (sauf pour la translation de vecteur nul).
- La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
- La transformation réciproque de la translation de vecteur $\vec{u}$ est une translation de vecteur $-\vec{u}$.

B. Rotations.

Définition:

Soit O un point du plan et un angle orienté de mesure θ . La rotation r , de centre O et d'angle θ , transforme le point M en point

$$M' \text{ tel que : } \begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{OM}; \vec{OM}') = \theta [2\pi] \end{cases}.$$



Propriété 4:

- Les rotations conservent le parallélisme, l'alignement et les angles orientés.
- Les rotations sont des isométries.
- Le centre de la rotation est son seul point invariant.
- La composée de deux rotations d'angles θ et θ' est :
 - * une translation si $\theta + \theta' = 0[2\pi]$,
 - * une rotation d'angle $\theta + \theta'$ sinon.
- La transformation réciproque de la rotation r de centre O et d'angle θ est la rotation r' de centre O et d'angle $-\theta$.

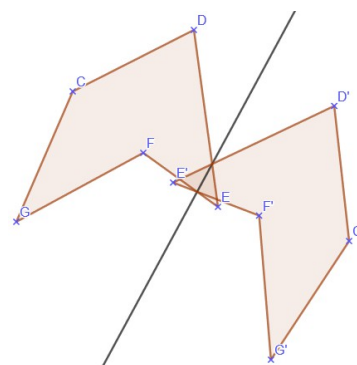
C. Réflexions.

Définition:

Soit (Δ) une droite du plan.

La réflexion s d'axe (Δ) transforme le point M en point M' tel que :

$$\begin{cases} (\Delta) \text{ est la médiatrice de } [MM'], & \text{si } M \notin (\Delta) \\ M = M' & , \text{ si } M \in (\Delta) \end{cases}.$$



Propriété 5:

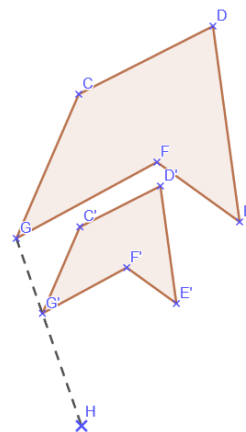
- Les réflexions conservent le parallélisme, l'alignement et les angles orientés.
- Les réflexions sont des isométries. Attention, l'orientation n'est pas conservée !
- Les points de l'axe (Δ) de la réflexion sont les seuls points invariants.

- La composée de deux réflexions d'axe (Δ) et (Δ') est :
 - * une translation de vecteur $\vec{u}$ si $(\Delta) \parallel (\Delta')$, tel que $\vec{u}$ orthogonal à (Δ) et $t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta) = (\Delta')$;
 - * une rotation de centre O (l'intersection de (Δ) et (Δ')) et d'angle $\theta = 2(\widehat{(\Delta);(\Delta')})$ si (Δ) et (Δ') sont sécantes
- Une réflexion est sa propre réciproque.
- L'image d'une droite (d) par la réflexion d'axe (Δ) est une droite parallèle à (d) si et seulement si $(d) \parallel (\Delta)$ ou $(d) \perp (\Delta)$.

D. Homothéties.

Définition: Soit O un point du plan et k un réel non nul.

- L'homothétie de centre O et de rapport k transforme le point M en point M' tel que $\vec{OM}' = k \times \vec{OM}$.
- L'image d'une figure est une figure **semblable**.



Propriété 6:

- Les homothéties conservent le parallélisme, l'alignement et les angles orientés.
- Les homothéties **ne sont pas** des isométries (sauf pour $k = \pm 1$). Elles multiplient les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2 .
- Le centre de l'homothétie est le seul point invariant.
- La composée de deux homothéties de rapport k et k' est :
 - * une translation si $kk' = 1$.
 - * une homothétie de rapport kk' sinon.
- La transformation réciproque de l'homothétie de centre O et de rapport k est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$.

- L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.
- Le centre d'une homothétie, un point et son image sont alignés.

Exercice: (annale du concours général)

Dans le plan, soient A, B, C trois points distincts tels que B soit sur le segment $[AC]$.

Soit Γ le cercle de diamètre $[AC]$ et de centre O_1 (de rayon R_1), γ le cercle de diamètre $[BC]$ et de centre O_2 (de rayon R_2), et (Δ) la tangente en B à γ .

On suppose donné un cercle γ' de centre O_3 (de rayon R_3) qui est tangent extérieurement à γ en un point D , tangent à (Δ) en E , et tangent intérieurement à Γ en F .

- 1) Justifier que les droites (Δ) et (CF) ne sont pas parallèles. On note G leur point d'intersection.
- 2) Montrer qu'il existe une homothétie de centre C qui transforme γ en Γ et une homothétie de centre F qui transforme Γ en γ' .
- 3) Déterminer les centres des homothéties qui transforment γ en γ' .
- 4) Soit I le milieu de $[BE]$. Montrer que les points A, I, D sont alignés sur une droite orthogonale à (GD) .
- 5) Montrer que $AB = GD$.
- 6) Exprimer le rayon r' de γ' en fonction des rayons R et r de Γ et γ .

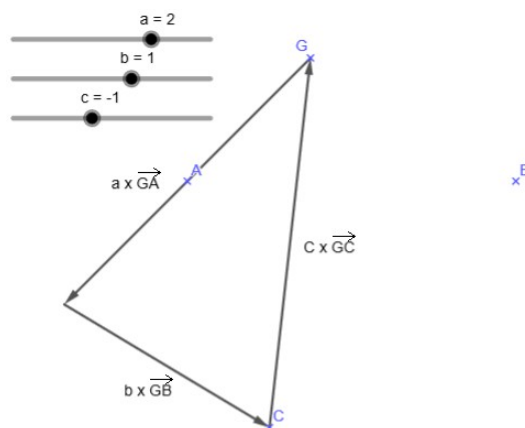
III. Barycentres.

Propriété – définition 7:

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$, des points du plan et des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, des réels tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k \neq 0$.

Alors il existe un unique point G du plan tel que : $\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{GA}_k = \vec{0}$. Ce point est appelé barycentre des points $A_1, A_2, \dots, A_n$, affecté des poids (ou coefficients) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, (ou encore du système $\{(A_1; \lambda_1); \dots; (A_n; \lambda_n)\}$)

Exemple: G est le barycentre du système $\{(A; 2); (B; 1); (C; -1)\}$



Remarque:

On parle d'isobarycentre lorsque les poids affectés à chaque point sont tous égaux. Par exemple, l'isobarycentre de deux points est le milieu de ce segment, celui de trois points est le centre de gravité du triangle.

Propriété 8: Soit G le barycentre du système $\{(A, a); (B, b)\}$.

1. (Commutativité) G est aussi le barycentre du système $\{(B, b); (A, a)\}$.
2. (Homogénéité) Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, G est le barycentre du système $\{(A; ka); (B; kb)\}$.

Démonstration:

1. Évident.
2. $ka + kb = k(a + b) \neq 0$ car $k \in \mathbb{R}^*$.
 $ka \vec{GA} + kb \vec{GB} = k(a \vec{GA} + b \vec{GB}) = k \vec{0} = \vec{0}$.

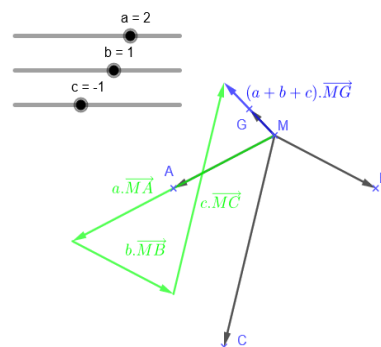
Propriété 9:

Si G est le barycentre du système $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$, pour tout point M du plan (ou de l'espace) :

$$(\alpha + \beta + \gamma) \vec{MG} = \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC}.$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} &= \alpha (\vec{MG} + \vec{GA}) + \beta (\vec{MG} + \vec{GB}) + \gamma (\vec{MG} + \vec{GC}) \\ \text{On a :} \quad &= (\alpha + \beta + \gamma) \vec{MG} + \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \vec{MG} \end{aligned}$$



Propriété 10: (Associativité du barycentre).

Soit G le barycentre de $\{(A_1; \lambda_1); \dots; (A_n; \lambda_n)\}$ avec $\sum_{k=1}^n \lambda_k \neq 0$. Soit m un entier tel que

$1 \leq m \leq n$ tel que $\sum_{k=1}^m \lambda_k \neq 0$. Si G_m est le barycentre du système $\{(A_1; \lambda_1); \dots; (A_m; \lambda_m)\}$ alors G

est le barycentre du système : $\left\{ \left(G_m; \sum_{k=1}^m \lambda_k \right); (A_{m+1}; \lambda_{m+1}); \dots; (A_n; \lambda_n) \right\}$.

Démonstration:

Soit M un point du plan. On a (par la propriété (16)) : $\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \right) \vec{MG}_m = \sum_{k=1}^m \lambda_k \vec{MA}_k$.

Donc : $\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \right) \vec{MG}_m + \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \vec{MA}_k = \sum_{k=1}^m \lambda_k \vec{MA}_k + \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \vec{MA}_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{MA}_k = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) \vec{MG}$, ce qui achève la preuve.

Exemple:

Soit ABC est un triangle. On note G l'isobarycentre des points A , B et C .

➤ Montrer que ce point G est le centre de gravité du triangle.

Exercice:

Soit M un point intérieur au triangle ABC (non aplati). On désire montrer que M est le barycentre de $(A, A_{MBC}); (B, A_{MAC}); (C, A_{MAB})$.

Soit A_1 , B_1 et C_1 les points d'intersection de (AM) , (BM) et (CM) avec (BC) , (AC) et (AB) respectivement. Soit B_2 et C_2 les projetés orthogonaux de B et C sur (AM) .

1. Montrer que A_1 est le barycentre de $(B, A_{MAC})(C, A_{MAB})$.
2. Conclure.

Propriété 11 (Conservation du barycentre).

Si f désigne une transformation usuelle du plan (translation, réflexion, rotation ou homothétie) et G le barycentre d'un système de points du plan, alors $f(G)$ est le barycentre de l'image de chacun des points du système.

Exercice:

A la fin du premier trimestre, Noé s'aperçoit qu'il a obtenu 2 points de moins que Lila à chaque contrôle de mathématiques. Lila a obtenu les notes (11, 8, 15, 10) affectées respectivement des coefficients (3, 2, 4, 1).

- Déterminer la moyenne de mathématiques du premier trimestre de Noé.

IV. Produit scalaire.

Le plan est munie d'un repère orthonormé.

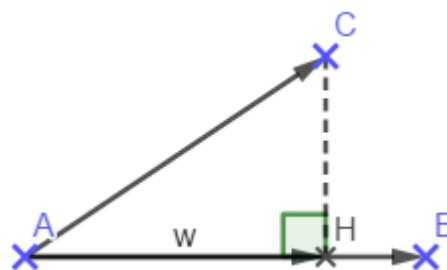
Définition:

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est défini par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Caractérisation:

Soient trois points A , B et C . Posons H le projeté orthogonal de C sur (AB) , alors :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \widehat{BAC} \in [0; \frac{\pi}{2}] \\ -AB \times AH & \text{si } \widehat{BAC} \in [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases}$$

**Propriété 12:**

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$

Propriété 13:

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors on a :

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Propriété 14: Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors on a :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

Démonstration:

Cela provient des règles de distributivité, par exemple : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

Théorème 5: (de la médiane)

Soit A et B deux points et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 \\ &= (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 \\ &= \vec{MI}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + \vec{IA}^2 + \vec{MI}^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IB} + \vec{IB}^2 \\ &= \vec{MI}^2 + 2\vec{MI} \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{AB}\right) + \left(\frac{1}{2}\vec{AB}\right)^2 + \vec{MI}^2 + 2\vec{MI} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{AB}\right) + \left(\frac{1}{2}\vec{AB}\right)^2 \\ &= 2MI^2 + \frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AB^2 \\ &= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \end{aligned}$$

Exemple:

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 4$ où A et B sont deux points du plan avec $AB = 2$.

Correction: Par le théorème de la médiane, en notant I le milieu de $[AB]$, on a :

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 4 \Leftrightarrow MI^2 = 1 \Leftrightarrow MI = 1$. L'ensemble des points M est donc le cercle de centre I et de rayon 1.

V. Géométrie analytique.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

A. Parallélisme et orthogonalité

Théorème 6: Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$. De plus $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x x' + y y' = 0$.

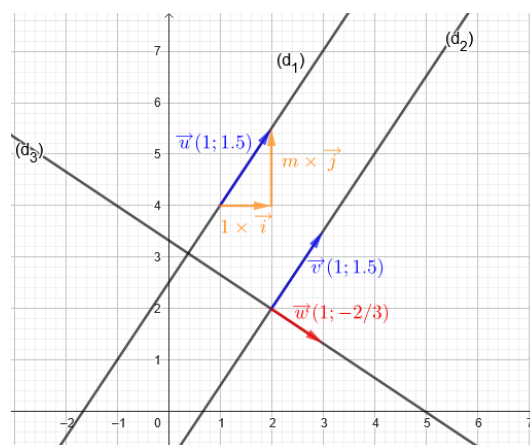
Théorème 7: Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Alors les vecteurs sont colinéaires si et seulement si $x y' - x' y = 0$.

Théorème 8:

Soient $(D): y = mx + p$ et $(D'): y = m'x + p'$.

1. $(D) \parallel (D') \Leftrightarrow m = m'$
2. $(D) \perp (D') \Leftrightarrow m \times m' = -1$



Démonstration:

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (D') est $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$

- (D) et (D') sont parallèles si et seulement si deux vecteurs qui les dirigent sont colinéaires.
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $1 \times m' - 1 \times m = 0 \Leftrightarrow m' = m$.
- (D) et (D') sont perpendiculaires si et seulement si deux vecteurs qui les dirigent sont orthogonaux.
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $1 \times 1 + m' \times m = 0 \Leftrightarrow m m' = -1$.

B. Distance d'un point à une droite

Théorème 9: Soient $(D) : ax + by + c = 0$ et $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$.

$$d(A, D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

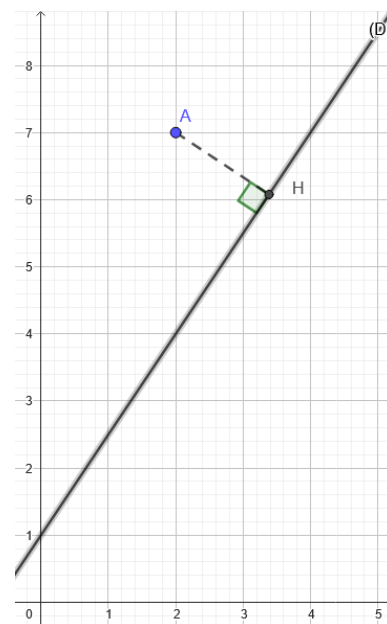
Démonstration:

Soient $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D)$, $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (qui est un vecteur normal à (D)) et H le pied de la hauteur issue de A .

Calculons le produit scalaire $\vec{AM} \cdot \vec{n}$ de deux façons :

- $|\vec{AM} \cdot \vec{n}| = |a(x - x_A) + b(y - y_A)| = |ax_A + by_A + c|$,
- $|\vec{AM} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\| = AH \times \sqrt{a^2 + b^2}$.

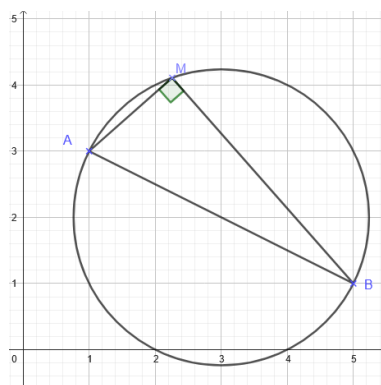
On en déduit que $d(A, D) = AH = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.



C. Cercle

Théorème 10:

1. Le cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$, de rayon $R \geq 0$, a pour équation : $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$.
2. Le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ a pour équation : $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.



Démonstration : Démontrons la deuxième partie du théorème.

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du cercle de diamètre $[AB]$. Le triangle ABM est alors rectangle en M .

Autrement dit, $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) = 0$.

D. Barycentre

Théorème 11:

Si G est le barycentre du système $\{(A, \alpha)(B, \beta)(C, \gamma)\}$, alors : $G \left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \right)$.

Démonstration:

Utiliser la propriété (9) en particulierisant avec le point O , centre du repère orthonormé direct.

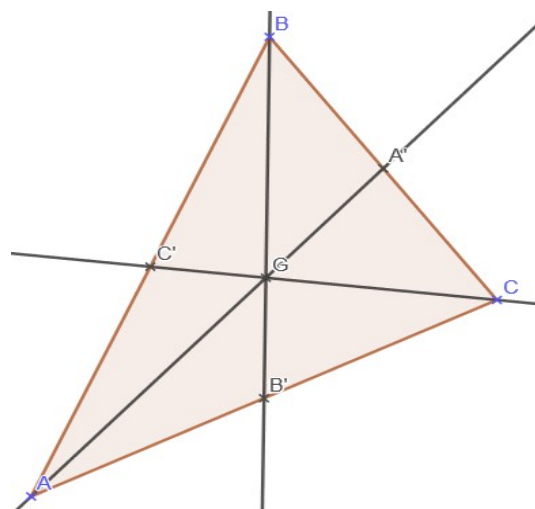
VI. Triangles et relations.

A. Droites remarquables du triangle

Dans toute la suite, ABC est un triangle non aplati.

Théorème 12:

Les trois médianes issues de A , B et C sont concourantes au centre de gravité G du triangle ABC .



Démonstration:

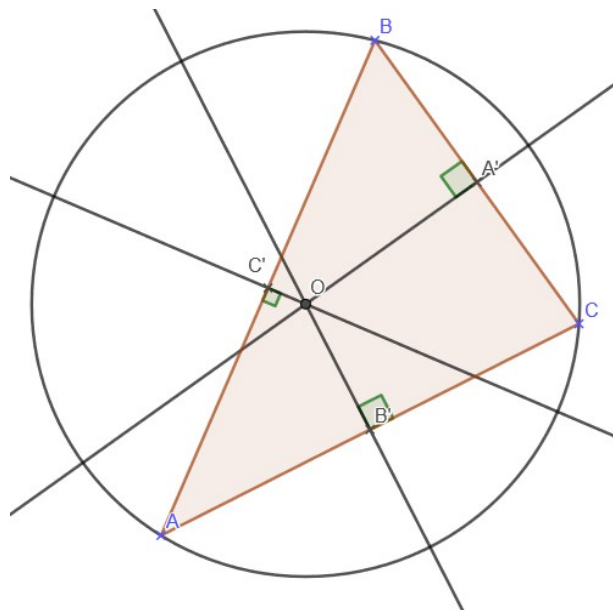
On note A' , B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. On note (AA') , (BB') et (CC') les médianes issues respectivement des sommets A , B et C .

Soit G le centre de gravité de ABC , G est le barycentre de $\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$. On sait que A' est le barycentre de $\{(B, 1); (C, 1)\}$. Donc par associativité du barycentre, G est barycentre de $\{(A, 1); (A', 2)\}$. Ainsi, $G \in (AA')$.

De manière analogue, on montre que $G \in (BB')$ et que $G \in (CC')$. D'où le résultat.

Théorème 13:

Les trois médiatrices sont concourantes au centre O du cercle circonscrit au triangle ABC .



Démonstration:

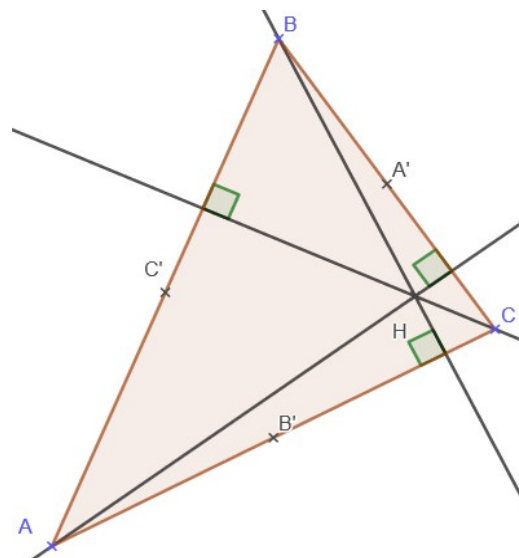
On note $(m_{[AB]})$, $(m_{[BC]})$ et $(m_{[CA]})$ les médiatrices respectives des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Soit O le point d'intersection de $(m_{[AB]})$ et de $(m_{[BC]})$ (ce point existe sinon $(AB) \parallel (BC)$).

Alors : $O \in (m_{[AB]})$ donc $OA = OB$,
 $O \in (m_{[BC]})$ donc $OB = OC$.

On en déduit que $OA = OC$ donc $O \in (m_{[CA]})$. Les médiatrices sont donc concourantes en un point O vérifiant $OA = OB = OC$ (centre du cercle circonscrit au triangle).

Théorème 14:

Les trois hauteurs sont concourantes au point H appelé orthocentre du triangle ABC .



Démonstration:

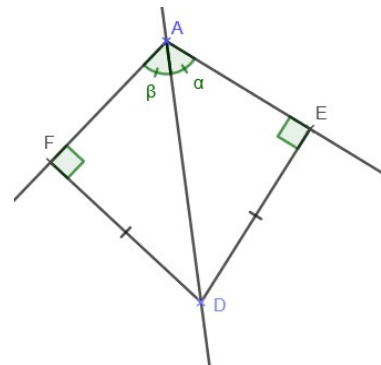
On note (h_A) , (h_B) et (h_C) les hauteurs issues respectivement des sommets A , B et C . Soit H le point défini par $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. (où O est le centre du cercle circonscrit à ABC).

Ainsi, $\vec{OH} = \vec{OA} + 2\vec{OA'}$ (où A' est le milieu de $[BC]$). Autrement dit, $\vec{AH} = 2\vec{OA'}$.
 Donc $\vec{AH}$ et $\vec{OA'}$ sont colinéaires. Donc H appartient à la parallèle à $(m_{[BC]})$ passant par A ,
 d'où $H \in (h_A)$.

De même, H appartient aux deux autres hauteurs. Ainsi les hauteurs sont concourantes en H .

Définition:

La bissectrice d'un angle est la droite qui coupe cet angle en deux angles de même mesure.



Propriété 16:

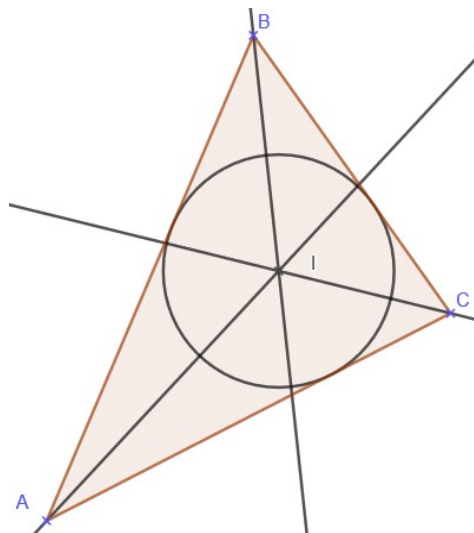
Tout point situé sur la bissectrice d'un angle est à égale distance de chaque côté de cet angle.
 Réciproquement, tout point situé à égale distance des deux côtés d'un angle est sur la bissectrice de cet angle.

Démonstration:

Calculer les angles pour obtenir des triangles isométriques, donc des longueurs égales...

Théorème 15:

Les trois bissectrices sont concourantes au point I centre du cercle inscrit dans le triangle ABC .



Démonstration:

On note (b_A) , (b_B) et (b_C) les bissectrices issues respectivement des sommets A , B et C .
 Soit $I = (b_A) \cap (b_B)$ (il existe, sinon contradiction d'angles alternes-internes égaux et de somme des angles égale à Π radians dans un triangle, les bissectrices ne peuvent pas être confondues non plus car le triangle est supposé non aplati).

- $I \in (b_A)$ donc $d(I, (AB)) = d(I, (AC))$.
- $I \in (b_B)$ donc $d(I, (BA)) = d(I, (BC))$.

Donc $d(I, (BC)) = d(I, (AC))$, donc $I \in (b_C)$. Ainsi les bissectrices sont concourantes en un point I vérifiant : $d(I, (AB)) = d(I, (BC)) = d(I, (AC))$ (centre du cercle inscrit).

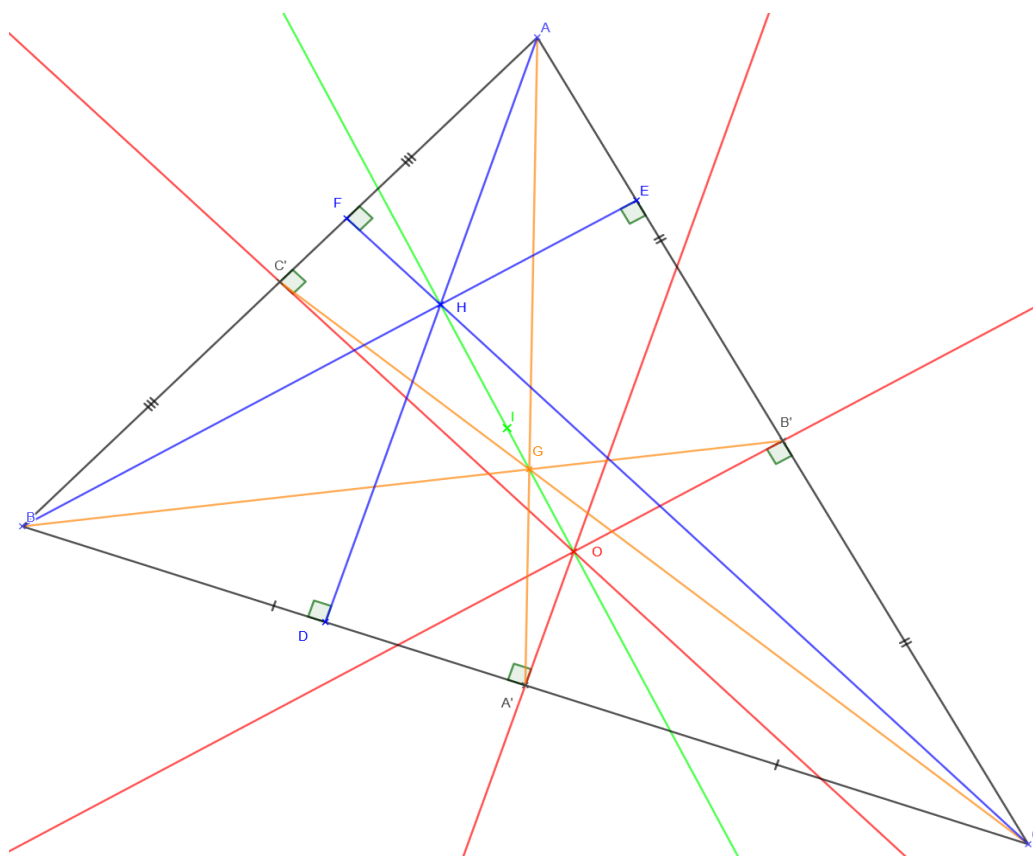
Exercice:

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On considère un point P intérieur au triangle ABC et tel que : $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$.

Montrer que $AP \geq AI$ et que l'égalité n'est vérifiée que lorsque $P = I$.

Théorème 16 :

Les points G , H et O sont alignés. Dans le cas où ils ne sont pas confondus, ils définissent une droite appelée droite d'Euler.



Démonstration : Voir exercice qui suit ...

Illustration : le point vert I est le centre du cercle d'Euler (voir exercice)

Exercice:

Soit ABC un triangle. On appelle A', B', C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$; D, E et F les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A, B et C et G le centre de gravité du triangle ABC .

- 1) On note O le centre du cercle C_1 circonscrit au triangle ABC et H le point défini par $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC et que $\vec{OH} = 3\vec{OG}$.

Qu'en déduit-on pour les points O, G et H ?

- 2) On note I, M, N et P les milieux respectifs des segments $[OH]$, $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$. On appelle C_2 le cercle de centre I de rayon la moitié du rayon du cercle C_1 .

Démontrer que $\vec{IM} = \frac{1}{2}\vec{OA} = -\vec{IA'}$. En déduire que le segment $[MA']$ est un diamètre du cercle C_2 .

- 3) Montrer que le point D appartient au cercle C_2 .
4) Donner neuf points situés sur le cercle C_2 (il s'agit naturellement de nommer neuf points de la figure définis sans référence au cercle ...)

B. Théorème de Thalès, théorème de Menelaüs

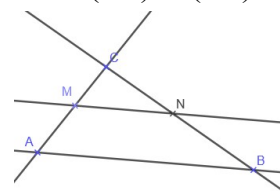
Définition: (Mesure algébrique)

Soit (d) une droite munie d'un repère $(O, \vec{i})$. Soit A et B deux points de (d) . On définit la mesure algébrique de AB notée $\overline{AB}$ par :
$$\overline{AB} = \begin{cases} AB & \text{si } \vec{AB} \text{ est de même sens que } \vec{i} \\ -AB & \text{si } \vec{AB} \text{ et } \vec{i} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$$

Théorème 17: (Thalès).

Soient A, B et C trois points non alignés et M et N des points respectivement de (AC) et (BC) .

- Si $(MN) \parallel (AB)$ alors $\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}}$ (ou $\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$)
- Si $\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CB}}$, alors $(MN) \parallel (AB)$.



Remarque :

Cette version simplifiée par rapport à la version connue depuis la classe de 3^e est simplifiée par la notion de mesure algébrique.

Théorème 18: (Menelaüs).

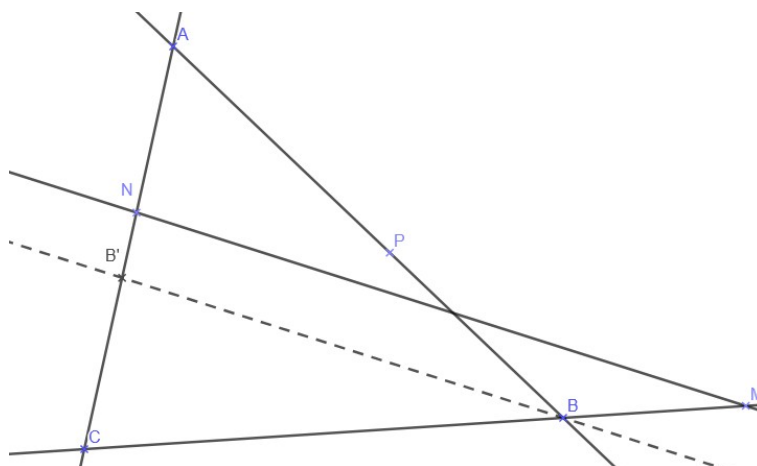
Soit A, B et C trois points non alignés. Soit M, N et P trois points appartenant respectivement à (BC) , (AC) et (AB) distincts de A, B et C .

Les points M, N et P sont alignés si et seulement si $\frac{MB}{MC} \times \frac{NC}{NA} \times \frac{PA}{PB} = 1$.

Exercice:

- Démontrer le théorème de Menelaüs.

Indication: Par double implication. Introduire le point B' intersection de la parallèle (MN) passant par B et de (AC) .



VII. Formules du triangle

Dans toute la suite, ABC est un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ (on suppose évidemment ces longueurs non nulles).

A. Formule des sinus et conséquences

Théorème 19: (Formule (ou loi) des sinus).

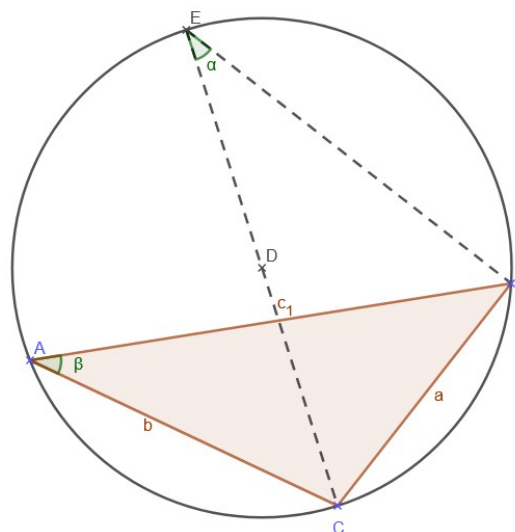
Si R est le rayon du cercle circonscrit à ABC , alors :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} = 2R.$$

Théorème 20: (Deuxième formule des sinus).

Si S est l'aire de ABC , alors :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} = \frac{abc}{2S}.$$



Démonstration: Découle de la formule des sinus car $S = \frac{1}{2}bc \sin(\widehat{BAC})$.

Corollaire 1:

Si S est l'aire de ABC et R le rayon du cercle circonscrit, alors $S = \frac{abc}{4R}$.

Corollaire 2:

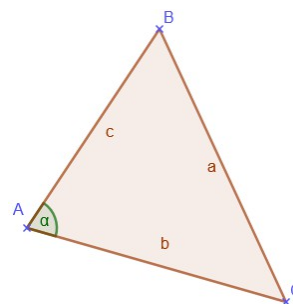
Soit J le point d'intersection de la bissectrice issue de A avec (BC) , alors $\frac{JB}{JC} = \frac{c}{b}$.

B. Théorème d'Al-Kashi

Théorème 21: (Théorème d'Al-Kashi).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{BAC}).$$

Démonstration: Calculer de deux manières différentes un produit scalaire bien choisit.



C. Formule de Héron

Théorème 22: (Formule de Héron).

Si S est l'aire du triangle ABC et P le demi-périmètre du triangle ($P = \frac{a+b+c}{2}$), alors :

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}.$$

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2(\widehat{BAC}) \\
 &= \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 - \cos^2(\widehat{BAC})) \\
 \text{Démonstration :} \quad &= \frac{1}{4} b^2 c^2 \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 && \text{Par le théorème d'Al-Kashi.} \\
 &= \frac{1}{4} b^2 c^2 - \frac{1}{16} (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\
 &= \frac{1}{16} [(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{16}(2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2) \\
&= \frac{1}{16}(a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2) \\
&= \frac{1}{16}(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a) && \text{D'où le résultat.} \\
&= \frac{1}{16}(2P - 2b)(2P - 2c)(2P - 2a)(2P) \\
&= (P - b)(P - c)(P - a)P
\end{aligned}$$

Exercice:

- Existe-t-il un triangle d'aire entière et dont les côtés sont des nombres premiers ?

Remerciements

Merci à M. Bernard Alexis, qui a réalisé un travail dont ce cours de géométrie est très largement inspiré.