

Géométrie plane

Correction

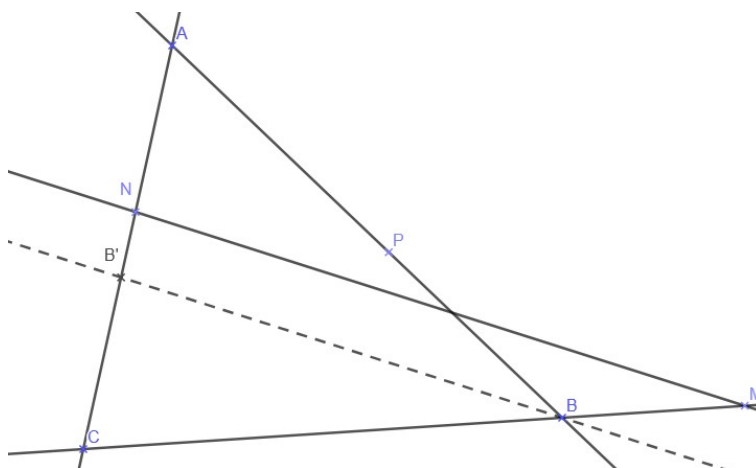
Théorème 18: (Menelaüs).

Soit A, B et C trois points non alignés. Soit M, N et P trois points appartenant respectivement à (BC) , (AC) et (AB) distincts de A, B et C .

Les points M, N et P sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

Démonstration:

Soit le point B' intersection de la parallèle (MN) passant par B et de (AC) .



1. Montrons que si les points M, N et P sont alignés alors $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

On applique le théorème de Thalès dans deux configurations :

- Dans le triangle CMN coupé par (BB') , tel que $(CM) \parallel (BB')$

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NB'}} \quad \text{d'où} \quad \overline{NB'} = \frac{\overline{NC} \times \overline{MB}}{\overline{MC}}.$$

- Dans le triangle ABB' coupé par (NP) , tel que $(NP) \parallel (BB')$

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NB'}} \quad \text{d'où} \quad \overline{NB'} = \frac{\overline{NA} \times \overline{PB}}{\overline{PA}}.$$

$$\text{On en déduit : } \frac{\overline{NA} \times \overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{NC} \times \overline{MB}}{\overline{MC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

2. Réciproquement, montrons que si $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$ alors les points M, N et P sont alignés.

- Montrons que (NP) n'est pas parallèle à (BC) par l'absurde.

On aurait alors dans le triangle ABC coupé par (NP) : $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ et donc

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = 1 \Leftrightarrow \overline{MB} = \overline{MC} . \text{ Ce qui implique que } B = C, \text{ ce qui est impossible.}$$

Donc les droites (NP) et (BC) sont sécantes.

- Posons X leur point d'intersection.

D'après ce qui précède, $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

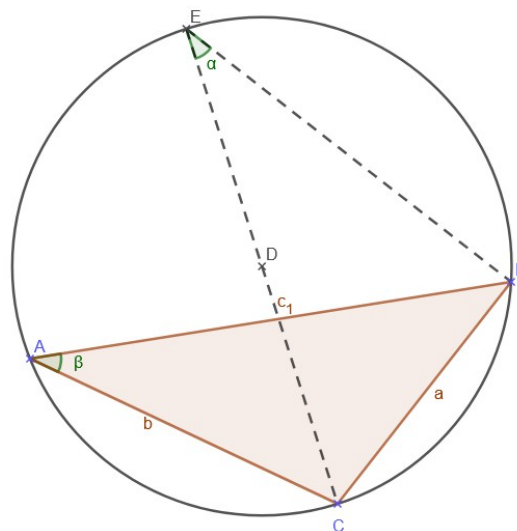
D'où $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$ ce qui implique que $X=M$.

Donc les points sont alignés.

Théorème 19: (Formule (ou loi) des sinus).

Si R est le rayon du cercle circonscrit à ABC , alors :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{b}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{c}{\sin(\widehat{ACB})} = 2R .$$



Démonstration:

Une première possibilité est de raisonner comme pour la démonstration du théorème 3 (la réciproque de l'angle inscrit).

Ici nous allons proposer une deuxième façon de démontrer ce résultat.

Dans la configuration ci-dessus, posons F le point du cercle tel que $[FC]$ est un diamètre.

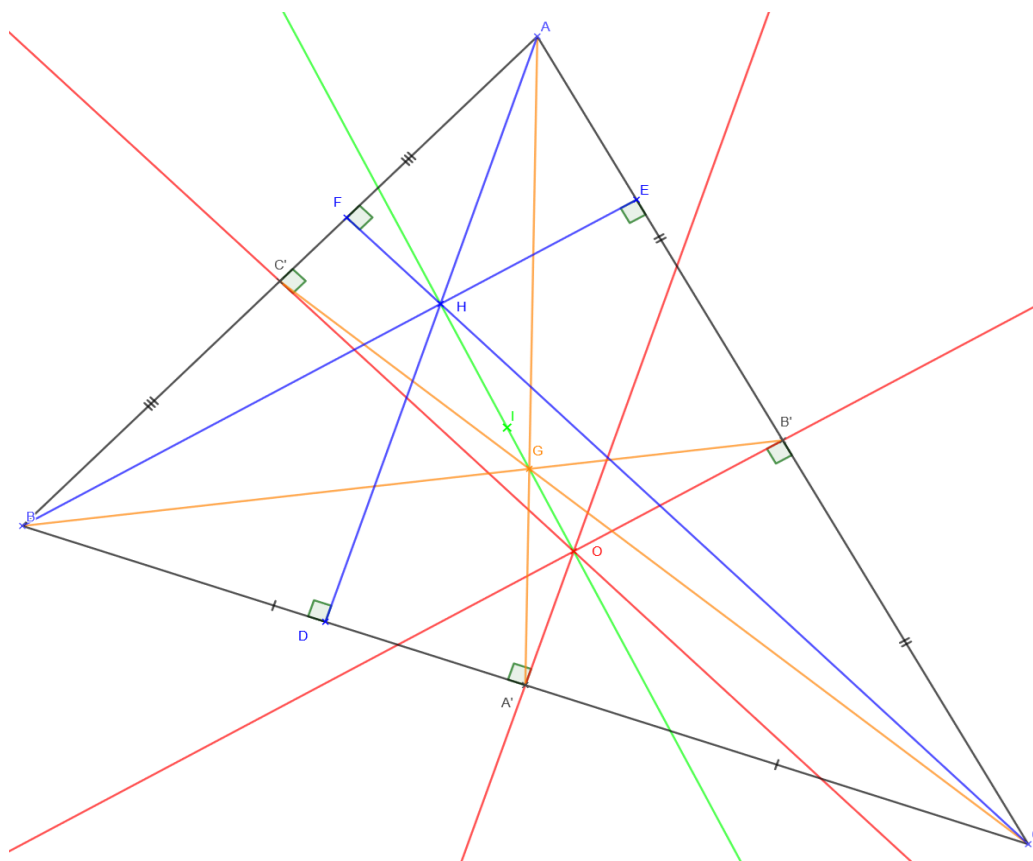
- Considérons les angles inscrits $\widehat{CFB}$ et l'angle au centre $\widehat{BAC}$. Ils interceptent le même arc, d'où $\widehat{CFB} = \widehat{BAC}$.

- Considérons l'angle inscrit $\widehat{FBC}$ et l'angle au centre $\widehat{FDC}$. Ils interceptent le même arc, d'où $\widehat{FDC} = 2 \times \widehat{FBC} \Leftrightarrow \widehat{FBC} = \frac{1}{2} \times 180 = 90^\circ$ FBC est donc un triangle rectangle en B.
- On a donc $\sin(\widehat{BAC}) = \sin(\widehat{BFC}) = \frac{BC}{FC} = \frac{a}{2R}$ d'où $\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = 2R$.

On prouve les autres égalités de la même façon.

Théorème 16 :

Les points G , H et O sont alignés. Dans le cas où ils ne sont pas confondus, ils définissent une droite appelée droite d'Euler.



Démonstration:

Soit ABC un triangle. On appelle A' , B' , C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$; D , E et F les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A , B et C et G le centre de gravité du triangle ABC .

- 1) On note O le centre du cercle C_I circonscrit au triangle ABC et H le point défini par $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC et que $\vec{OH} = 3 \vec{OG}$.

Introduisons le point G dans l'égalité :

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OG} + \vec{GA} + \vec{OG} + \vec{GB} + \vec{OG} + \vec{GC} = 3\vec{OG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 3\vec{OG} \quad .$$

Car G est le centre de gravité du triangle, c'est donc l'isobarycentre de A , B et C .

Qu'en déduit-on pour les points O , G et H ?

Les points O , G et H sont alignés.

- 2) On note I , M , N et P les milieux respectifs des segments $[OH]$, $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$. On appelle C_2 le cercle de centre I de rayon la moitié du rayon du cercle C_1 .

Démontrer que $\vec{IM} = \frac{1}{2}\vec{OA} = -\vec{IA}' \quad .$

$$\vec{IM} = \vec{IH} + \vec{HM} = \frac{1}{2}\vec{OH} + \frac{1}{2}\vec{HA} = \frac{1}{2}\vec{OA} \quad .$$

De plus $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ et $\vec{OI} = \frac{1}{2}\vec{OH} = \frac{3}{2}\vec{OG}$, d'où $\vec{GI} = \vec{OI} - \vec{OG} = \frac{1}{2}\vec{OG} \quad .$

En outre, G barycentre du système $\{(A;1);(A';2)\}$ donc $\vec{GA} + 2\vec{GA}' = \vec{0} \quad .$

Donc $\vec{OA} = \vec{OG} + \vec{GA} = -2.\vec{IG} - 2.\vec{GA}' = -2.\vec{IA}'$

En déduire que le segment $[MA']$ est un diamètre du cercle C_2 .

On a $\vec{IM} + \vec{IA}' = \vec{0} \quad .$ Donc I est le milieu de $[MA']$, d'où le résultat.

- 3) Montrer que le point D appartient au cercle C_2 .

MDA' est un triangle rectangle de diamètre son hypoténuse. Son cercle circonscrit admet donc $[MA']$ comme diamètre. Il s'agit donc du cercle C_2 . D'où $D \in C_2 \quad .$

- 4) Donner neuf points situés sur le cercle C_2 (il s'agit naturellement de nommer neuf points de la figure définis sans référence au cercle ...)