Dénombrement.

A la fin de cet exposé, vous saurez, entre autres, compter le nombre de façons de monter un escalier avec des pas de une ou deux marches ou encore évaluer si un *full* au poker arrive plus fréquemment qu'une *couleur*.

Les techniques de dénombrement et leurs applications sont très nombreuses. Leur éventuelle complexité nous incite à formaliser des situations de comptage qui se rencontrent très souvent.

Sommaire

1 Principes fondamentaux de dénombrements :

1.1 Cardinal d'un ensemble :

Définition 1

Soit E, un ensemble fini.

Le **cardinal** de E est l'entier naturel égal au nombre d'éléments de E.

On le note $|E|$ ou encore $\text{Card}(E)$.

Exercice n° 1 :

1. E est l'ensemble des lycées de l'académie participant au concours général. A quoi est égal $|E|$?
2. E est l'ensemble des entiers entre 2 et 9. On a alors $E = \{ 2 ; 3 ; \cdots ; 9\}$. Donner $\text{Card}(E)$.
3. Soit $E = \mathbb{Z} \cap]-3{,}001 ; 9{,}99]$. Décrire E plus simplement. Donner $|E|$.
4. Concernant $\emptyset$, l'ensemble vide.
   (a) A quoi est-égal $\text{Card}(\emptyset)$?
   (b) Soit E, un ensemble. Donner une proposition équivalente à la proposition "$\text{Card}(E) = 0$".
   (c) Soit E, un ensemble non vide. En déduire une inégalité sur $|E|$.

5. Créer deux ensembles dont les cardinaux sont égaux à 3 et à 2 respectivement.

6. L'ensemble E contient moins de 32 éléments et au moins 5 éléments. Donner un encadrement de $|E|$.

7. Soit $E = \{ a\ ;\ b\ ;\ c \}$, un ensemble à trois éléments.

   (a) Former tous les sous-ensembles inclus dans E (il doit y en avoir 8).

   On note $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble des sous-ensembles de E ou encore l'ensemble des **parties** de E.

   (b) Donner $|\mathscr{P}(E)|$.

   (c) Maintenant $E = \{ a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d \}$ a quatre éléments. Conjecturer $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E))$.

8. Soit E, l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$: $x^3 - 3x = 0$. Calculer $|E|$.

9. Soit $A = \{ a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d \}$ et $B = \{ a\ ;\ c\ ;\ e\ ;\ f\ ;\ g \}$ deux ensembles.

   (a) Décrire A et B à l'aide d'un diagramme de Venn (avec des patates).

   (b) Donner $\mathrm{Card}(A)$ et $\mathrm{Card}(B)$.

   (c) Décrire, dans le diagramme, $A \cap B$ et $A \cup B$. Donner leurs cardinaux.

   (d) Trouver une relation qui semble se généraliser entre les cardinaux de A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

1.2 Cardinal d'une union d'ensembles :

Propriété 1

Soit E, un ensemble.

Soit A et B, deux sous-ensembles finis de E.

Si A et B sont **disjoints** alors $\quad \mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.

Si A et B sont **ne** sont **pas** disjoints alors $\quad \mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

Démonstration :

La première identité est admise. Pour la deuxième...

Rappel :

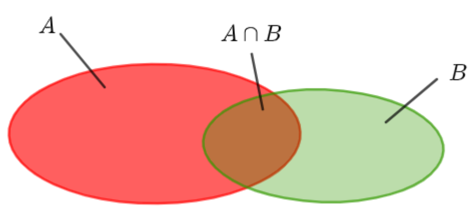
Pour A et B deux ensembles, $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

On a alors, pour tout élément a, $\quad a \in A \setminus B \quad \Leftrightarrow \quad a \in A$ et $a \notin B$.

Aidons-nous d'un diagramme de Venn !

$A \cup B$ est union disjointe de A et $B \setminus A$.

On a alors $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|$.



B est union disjointe de $(B \setminus A)$ et $A \cap B$ donc $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$

donc $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$.

On en déduit alors que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Exercice n° 2 :

1. Soit M, l'ensemble des lettres qui forment le mot mathématiques. Soit P, l'ensemble des lettres qui forment le mot physique. Identifier $M \cap P$ puis calculer $|M \cup P|$.
2. M et C sont les ensembles d'élèves venant respectivement des lycées Vauban et Diderot.

   A t-on $|M \cup C| = |M| + |C|$?
3. Soit A, B et C trois ensembles.
   (a) A l'aide d'un diagramme avec $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, persuadez-vous que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
   (b) En remarquant que $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$, montrer que
   $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Propriété 2

Soit E_1, E_2,... et E_p, p ensembles finis disjoints deux à deux. On a

$$|E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_p| = |E_1| + |E_2| + \cdots + |E_p|.$$

Autrement dit, $$\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{p} E_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \text{Card}(E_k).$$

Démonstration :

Par récurrence sur $p \geq 1$. Avec la relation de récurrence $\left(\bigcup_{k=1}^{p+1} E_k\right) = \left(\bigcup_{k=1}^{p} E_k\right) \cup E_{p+1}$.

Remarque :

"E_1, E_2,... et E_p sont **disjoints deux à deux**" équivaut à "Pour tous i et j entre 1 et p avec $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$".

Exercice n° 3 :

E_1, E_2,... et E_p sont des ensembles disjoints deux à deux tels que, pour tout entier k entre 1 et p, $|E_k| = 2k+1$.

Calculer $\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{p} E_k\right)$.

1.3 Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles :

Définition 2

Soit E et F deux ensembles.

Le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble des couples $(e\,;\,f)$ tes que $e \in E$ et $f \in F$.

Ce produit cartésien se note $E \times F$.

On a a alors $\quad (x\,;\,y) \in E \times F \quad \Leftrightarrow \quad x \in E$ et $y \in F$.

Exercice n° 4 :

1. Soit $E = \{ a ; b ; c \}$ et $F = \{ b ; e \}$.

   A l'aide d'un tableau énumérer les éléments de $E \times F$. Combien y en a t-il ?

2. Où retrouve t-on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (que l'on note aussi $\mathbb{R}^2$) ?

3. Citer quatre éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ qui ne sont pas dans $\mathbb{N}^2$.

4. A quoi est-égal $\emptyset \times \mathbb{N}$?

5. A t-on $(-3 ; \frac{2}{7}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$? A t-on $(4 ; \pi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$?

6. Soit A, B et E des ensembles. Que pensez-vous de l'égalité $(A \cup B) \times E = (A \times E) \cup (B \times E)$?

Propriété 3

Soit E et F deux ensembles finis. On a

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F).$$

Démonstration :

Par récurrence sur n, le cardinal de E, en écrivant que $E = E' \cup \{e\}$ où e est un élément de E.

Remarque :

Une façon plus intuitive de calculer $\mathrm{Card}(E \times F)$ est de dire qu'un élément de E forme $|F|$ éléments de $E \times F$ donc les $|E|$ éléments de E forment les $|E| \times |F|$ éléments de $E \times F$. On retrouve aussi ce résultat à l'aide d'un tableau rectangulaire à deux entrées.

Exercice n° 5 :

1. On reprend les ensembles de lettres M et P de l'exercice n° 2.1. Calculer $|M \times P|$.

2. Calculer $|\emptyset \times M|$. Cela corrobore-t-il la réponse du 4.4 ?

3. On a $|A \times B| = 56$ et $|A| = 14$. A quoi est-égal $|B|$?

Définition 3

Soit E_1, E_2,... et E_n, n ensembles.

$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble des n-**uplets** $(e_1 ; e_2 ; \cdots ; e_n)$ où $e_1 \in E_1$ et $e_2 \in E_2$ et ... et $e_n \in E_n$.

En particulier, un n-uplet d'un ensemble E est une suite de n éléments de E.

L'ensemble des n-uplets de E se note E^n (c'est $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ facteurs}}$).

Remarques :

- Un couple d'éléments de E est un élément de E^2. Un élément de E^3 est un triplet d'éléments de E...
- Où retrouve t-on $\mathbb{R}^3$?
- Un n-uplet est une liste **ordonnée** d'éléments. Par exemple, $(2\,;\,3) \neq (3\,;\,2)$.

Propriété 4

Soit E_1, E_2,... et E_n, n ensembles finis. On a

$$|E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p| = |E_1| \times |E_2| \times \cdots \times |E_p|.$$

En particulier, si E est un ensemble et $n \geq 1$.

$$\text{Card}(E^n) = (\text{Card}(E))^n$$

Démonstration :

Par récurrence sur n, en écrivant que $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_{n+1} = (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) \times E_{n+1}$.

Remarques :

Le jeu de déS, une série de pile ou face, des tirages avec remises seront modélisés par les éléments de E^n.

Exercice n° 6 :

1. Un code secret est composé de 4 chiffres. Le premier est non nul, le second est pair, le troisième est impair et le dernier est multiple de 3. Décrire l'ensemble où se trouve un tel quadruplet. Quel est alors le nombre de codes possibles ?
2. On considère ici $\{0\,;\,1\}^n$ où $n \geq 1$.
   (a) Le nombre de n-uplets d'éléments pris dans $\{0\,;\,1\}$ est ....". Compléter.
   (b) Soit $E = \{e_1\,;\,e_2\,;\,\cdots\,;\,e_n\}$, un ensemble à n éléments.
   Pourquoi y a t-il autant de n-uplets de 0 ou 1 que de parties dans E ? Calculer $|\mathscr{P}(E)|$.
   (c) Où avez-vous déjà aussi rencontré $\{0\,;\,1\}^n$?
3. On reprend les ensembles de lettres M et P de l'exercice n° 2.1.
   (a) Calculer $|M^4|$. Combien de mots de 4 lettres peut-on faire avec les lettres du mot mathématiques ?
   (un mot, ici, est un quadruplet de lettres, le mot ayant ou non une signification)
   (b) Que dénombre $|P^3|$?
   (c) En terme de mots à quoi correspond un élément de $P^2 \times M^2$? Et $(P \times M)^2$?

(d) On jette 5 dés, l'un après l'autre, et on note les 5 faces. On obtient alors un élément de ... ?

Remarques :

- Une autre façon de dénombrer les p-uplets est d'appliquer le **principe multiplicatif** :
  "Une expérience se déroule en p étapes dont chacune a n_1, n_2,... et n_p choix respectivement.
  Le nombre d'issues de cette expérience est alors $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$."
- On peut aussi dénombrer les p-uplets en construisant l'arbre des choix. Du premier nœud, n_1 arêtes débouchent sur les nœuds "choix de la première étape". A chacun de ces nœuds, n_2 arêtes débouchent sur les "choix de la deuxième étape" et ainsi de suite... jusqu'au $n_1 n_2 \dots n_{p-1}$ arêtes qui débouchent chacune sur les n_p choix de la dernière étape pour donner $n_1 n_2 \dots n_{p-1} n_p$ issues.

Exercice n° 7 :

1. A la cantine, chacun prend obligatoirement entrée-plat-fromage-dessert. Le café est facultatif.
   Appliquer le principe multiplicatif pour obtenir le nombre de repas possibles à la cantine sachant qu'il y a 4 entrées, 2 plats principaux, 3 fromages et 4 desserts et un café.
2. Au tiercé, pour compter les triplets gagnants possibles parmi 13 chevaux au départ, on forme des éléments de E^3 où E désignent l'ensemble des 13 numéros de chevaux. Cependant, il y a des triplets de E^3 qui ne représentent pas un triplet gagnant. Décrire ces triplets.

Quand les n-uplets d'un ensemble E sont constitués d'éléments deux à deux distincts, on parlera alors d'...

2 Arrangement de k éléments pris parmi n :

Définition 4 (Arrangement)

Soit E, un ensemble à n éléments.

Soit k, un entier tel que $0 \leq k \leq n$.

Un **arrangement** de k éléments de E est un k-uplet d'éléments de E **distincts deux à deux**.

Remarque :

On parlera souvent d'un **arrangement de k éléments pris parmi** n.

Exercice n° 8 :

Énumérer tous les arrangements de 2 (resp. 1 et 0) éléments pris dans $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$.

Propriété 5

Soit n et k, deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$.

Le nombre d'arrangements de k éléments pris parmi n est égal à

$$\mathcal{A}_n^k = \underbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}_{k \text{ facteurs}}$$

Démonstration :

On dénombre les k-uplets de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k$ où $|E_1| = n$ et $|E_2| = n-1$ et ... et $|E_k| = n-k+1$.

Remarques :

Les arrangements modélisent les listes **ordonnées** de k objets pris parmi n, les tirages sans remise,...

Exercice nº 9 :

1. Vérifier la formule avec les arrangements de l'exercice n° 8.
2. Combien y a t-il de triplets gagnants possibles à l'arrivée pour 13 chevaux ?
3. Calculer très vite $\mathcal{A}_{100}^1$, $\mathcal{A}_{100}^2$ et $\mathcal{A}_{101}^3$.
4. Une urne contient 11 boules numérotées de 1 à 11. On en tire 4 à la suite sans remise. Combien y a t-il de tirages possibles ?
5. Dériver k fois la fonction monôme définie par $f(x) = x^n$. On commencera par $k = 1$, $k = 2$,...

3 Permutation d'un ensemble :

Définition 5 (Permutation)

Soit E, un ensemble à n éléments.

Un **permutation** de E est un arrangement des n éléments pris dans E.

Exercice nº 10 :

Soit $E = \{\, R \;;\; V \;;\; B \,\}$. Former les permutations de E. Combien y en a t-il ?

Remarques :

- Une permutation est un élément particulier de $E^{|E|}$: ses éléments sont deux à deux distincts.
- Pour l'ensemble vide, il n'y a qu'une seule permutation : la liste vide (). Pour un singleton tel que $\{\, e \,\}$, il n'y a qu'une seule permutation : (e).
- Les permutations de $E = \{\, P \;;\; F \,\}$ sont les couples $(P \;;\; F)$ et $(F \;;\; P)$.

- Une urne contient des boules toutes distinctes. En les tirant toutes, à la suite et sans remise, on obtient une permutation de l'ensemble de toutes les boules.
- Avec un jeu de 32 cartes, on obtient une permutation de l'ensemble de ces 32 cartes en les alignant les unes après les autres.
- On connaît le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments : c'est $\mathcal{A}_n^n = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ d'où la...

Définition 6 (Factorielle)

Soit n un entier naturel.

Le **nombre de permutations** d'un ensemble à n éléments se note $n!$ et se lit "**factorielle** n".

Plus précisément, $0! = 1$ et $1! = 1$ et $2! = 2$ et pour tout $n \geq 3$,

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1 \text{ ou encore } n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Remarques :

- La suite u des factorielles n est la suite d'entiers naturels $u = (1 \,;\, 1 \,;\, 2 \,;\, 6 \,;\, 24 \,;\, 120 \,;\, 720 \,;\, 5040 \,;\, \cdots)$.

  Elle est définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$
- La priorité de calcul étant donnée à la factorielle, on a les identités $(n+1)n! = (n+1)!$ et $\dfrac{(n+1)!}{n+1} = n!$.
- On démontre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!}{e^n} = +\infty$ d'où la croissance très très rapide de $n!$ vers $+\infty$.

Exercice nº 11 :

1. 8 personnes déposent chacune un cadeau dans un sac. Ces cadeaux sont alors redistribués aux 8 personnes. Combien y a-t-il de redistributions possibles ?
2. Soit $n \geq 4$. Réduire la fraction $\dfrac{n!}{(n-4)!}$. Calculer, réduire $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n-1)!}$.

Propriété 6

Pour tous entiers k et n tels que que $0 \leq k \leq n$,

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Démonstration :

$\mathcal{A}_n^k \times (n-k)! = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k)! = n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k) \times (n-k-1) \times \cdots \times 1 = n!$ d'où la propriété.

4 Combinaisons d'un ensemble :

4.1 Définitions, premières propriétés :

Définition 7

Soit E, un ensemble de cardinal n et k un entier naturel inférieur à n.

Une **combinaison** de k éléments de E est une partie de E à k éléments.

Remarques :

- Les combinaisons de $E = \{ a ; b \}$ sont $\emptyset$, $\{ a \}$, $\{ b \}$ et E.
- On ne confondra pas un arrangement de k éléments de E avec une combinaison de k éléments de E.

  On a par exemple $\{ a ; b \} = \{ b ; a \}$ et $(a ; b) \neq (b ; a)$.

Propriété 7

Soit k et n, deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n est égal à $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

L'entier naturel $\binom{n}{k}$ est appelé "coefficient binomial n, k".

Si $k > n$ alors $\binom{n}{k} = 0$.

Démonstration :

Une combinaison de k éléments pris parmi n forme $k!$ permutations donc $k!$ arrangements de k parmi n donc $\binom{n}{k}$ combinaisons de k éléments pris parmi n forment $\binom{n}{k} \times k!$ arrangements de k éléments pris parmi n donc $\binom{n}{k} \times k! = \mathcal{A}_n^k$ donc $\binom{n}{k} \times k! = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ donc $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Quand $k > n$ il n'y a pas de combinaisons de k éléments pris parmi n donc $\binom{n}{k} = 0$.

Remarques :

- Lorsque qu'on tire simultanément k boules parmi n on forme une combinaison de boules.
- Dans une des versions du poker, une main est une combinaison de 5 cartes prises parmi 32.
- Pour réduire $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, en un premier temps, on simplifiera $n!$ avec le plus grand de $k!$ ou de $(n-k)!$.
- A retenir : $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ et $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Propriété 8

Pour tout entier n et tout entier k, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration combinatoire :

En formant une combinaison C de k éléments pris parmi n éléments de E, on forme la combinaison $E \setminus C$ de $n-k$ éléments pris parmi n. Il y a alors autant de combinaisons de k éléments pris parmi n que de combinaisons de $n-k$ éléments pris parmi n.

Exercice n^o 12 :

Test de vocabulaire ! Soit $E = \{4 ; 5 ; 6 ; 7\}$.

Si un élément de la première ligne est un élément de la première colonne, cochez la case correspondante.

	$\emptyset$	$\{6 ; 4\}$	$(6 ; 5)$	$(5 ; 4 ; 5)$	$(8 ; 4 ; 5)$	5	$\{7\}$	$(7 ;7)$	$(7 ; 6 ; 4; 5)$	$(7 ; 4 ; 6)$
Une partie de E										
Un n-uplet de E										
Un élément de E^3										
Un arrangement de E										
Une permutation de E										
Un élément de E										
Une combinaison de E										

Exercice n^o 13 :

1. Calculer, réduire $\binom{45}{3}$, $\binom{27}{7}$ et $\binom{10}{9}$.
2. La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$ avec $n \geq 3$ et $p \in [0 ; 1]$. Calculer $P(X = 3)$.
3. Au poker, quel est le nombre de mains de cinq cartes tirées d'un jeu de 32 cartes ?
4. Au poker, combien y a t-il de mains avec une paire de valets .(Ex : { VP ; VK ; 8T ; 8K ; RT}).

   (*Stratégie* : construire une telle main par étapes en dénombrant les choix de chaque étape. Le principe multiplicatif achève de dénombrer.)

   (a) On commence à choisir une paire de valets. De combien de façons ?

   (b) On choisit ensuite une combinaison de trois cartes parmi 28. De combien de façons ?

   (c) Donner alors le nombre de mains de 5 cartes avec une paire de valets.
5. Au poker, combien y a t-il de mains avec un full c'est à dire une paire accompagnée d'un brelan ? (Ex : { VP ; VC ; 7T ; 7K ; 7P})

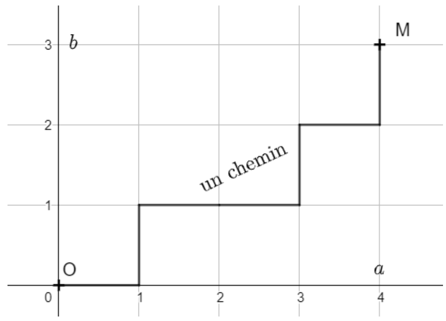
Exercice n° 14 :

1. Dénombrer les n-uplets de $\{0\ ;\ 1\}^n$ contenant k "0" où $0 \leq k \leq n$.

2. Soit $(a\ ;\ b) \in \mathbb{N}^2$. On appelle chemin de $O(0\ ;\ 0)$ à $M(a\ ;\ b)$, toute ligne brisée allant de O vers M en se déplaçant d'une abscisse vers la droite ou d'une ordonnée vers le haut.

   Chaque chemin est alors représenté par un unique $(a+b)$-uplet contenant a lettres D et b lettres H.

   Quel est le nombre de chemins allant de O vers M ?



3. Quel est le nombre de p-uplet $(x_1\ ;\ x_2\ ;\ \ldots\ ;\ x_p)$ de $(\mathbb{N}^*)^p$ tels que $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$ où n est un entier naturel donné ?

   (Pour n bien choisi, on pourra jalonner la droite des réels avec les entiers de 0 à n.)

4.2 Des identités combinatoires :

Propriété 9 (Formule de Pascal)

Soit n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. On a

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Démonstration :

On utilise la convention : $\binom{n}{k} = 0$ lorsque k ou n sont des entiers négatifs.

Pour les cas marginaux $k = 0$ ou $n = 0$ ou $k \geq n$, on vérifie la formule. Sinon pour $1 \leq k \leq n-1$,

Preuve calculatoire :

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

On a, pour réduire au même dénominateur, les identités $n! = (n-1)!n$ et $(n-k)! = (n-k-1)!(n-k)$ d'où

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{(n-1)!k}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k)+(n-1)!k}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ d'où } \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Preuve combinatoire :

Soit E, un ensemble à n éléments. Soit a, un élément de E (E est non vide car $1 \leq n-1$).

Par définition, il y a $\binom{n}{k}$ combinaisons de k éléments pris parmi les n éléments de E.

Ces combinaisons sont soit celles qui contiennent a soit celles qui ne contiennent pas a.

Il y a $\binom{n-1}{k-1}$ combinaisons qui contiennent a. Il y a $\binom{n-1}{k}$ combinaisons qui ne contiennent pas a.

On en déduit que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Calcul des coefficients binomiaux de proche en proche avec le **triangle de Pascal**.

Par défaut, les cellules blanches contiennent la valeur 0 de coefficients binomiaux nuls.

Les cellules jaunes contiennent les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$.

On saisit $\boxed{1}$ dans $C3$ puis $\boxed{= B3 + C3}$ dans $C4$. Cette formule est recopiée dans les cellules jaunes ver les bas et vers la droite.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n ↓ p →	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	-1											
3	0		1									
4	1		1	1								
5	2		1	2	1							
6	3		1	3	3	1						
7	4		1	4	6	4	1					
8	5		1	5	10	10	5	1				
9	6		1	6	=E8+F8			6	1			
10	7		1	7	21	35	35	21	7	1		
11	8		1	8	28	56	70	56	28	8	1	
12	9		1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
13												

Propriété 10 (Formule de Binôme de Newton)

Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel n non nul ,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration :

Par récurrence sur n, en se servant des propriétés de factorisation et de développement de la somme $\sum$.

Exercice n° 15 :

1. Soit x, un réel. Développer $(x+10)^6$.
2. En choisissant les réels a et b convenablement dans la formule de Newton, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

   Donner une preuve combinatoire de cette formule.
3. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$. Calculer, pour x non nul, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-2k}$.

4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0,\ k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$ et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$.

5. En dérivant membre à membre les fonctions suggérées dans l'identité $(x+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$,

   montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Exercice n° 16 :

Soit n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$.
Montrer par une preuve combinatoire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{2n}{p}$.
(On considérera l'ensemble à $2n$ éléments $E = \{e_1 \ ; \ e_2 \ ; \ \dots \ ; \ e_n \ ; \ f_1 \ ; \ f_2 \ ; \ \dots \ ; \ f_n\}$.)
L'identité de Van der Monde (mathématicien français 1735 - 1796) généralise l'identité précédente.
La voici ! Soit a, b et p des entiers naturels tels que $0 \leq p \leq a+b$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k} = \binom{a+b}{p}$.

5 Dénombrer avec les suites :

Lorsqu'un processus de récurrence apparait dans la construction d'éléments à dénombrer il est naturel de poser u_n, le nombre de ces éléments à l'étape n. Il s'en dégage une relation de récurrence de la suite u et donc un moyen de calculer u_n.

Exercice n° 17 :

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1.

1. Combien y a t-il de n-uplet de $\{0 \ ; \ 1\}^n$ qui ne comportent pas deux "0" consécutifs ?

   Comme souvent, on examine les cas donnés par les "petites" valeurs de n.

   Pour $n = 1$, il y a **deux** 1-uplets : (0) et (1).

   Pour $n = 2$, il y a **trois** couples : $(0 \ : \ 1)$, $(1 \ ; \ 0)$ et $(1 \ ; \ 1)$.

   Pour $n = 3$, il y a **cinq** triplets : des trois couples précédents on peut coller à chacun un 1 et on peut coller un 0 qu'à deux des trois couples précédents.

   Pour $n = 4$, il y a **huit** triplets : des cinq couples précédents on peut coller à chacun un 1 et on peut coller un 0 qu'à trois des cinq couples précédents.

   Posons u_n le nombre de tels n-uplet. Il semblerait que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, pour tout entier naturel non nul. Démontrer cette conjecture.

2. Je monte un escalier à n marches avec un pas de 1 ou 2 marches. De combien de façons, puis-je monter cette escalier ?

3. Dans le plan (D_1), (D_2),..., (D_n), des droites non parallèles deux à deux entre elles et non concourantes trois à trois entre elles.

   Combien de régions du plan, ces droites forment-elles ?

4. Trouver le nombre de permutations $(a_1 \,;\, a_2 \,;\, \ldots \,;\, a_n)$ de l'ensemble $\{1 \,;\, 2 \,;\, \ldots \,;\, n\}$ tels qu'il existe un unique indice i entre 1 et $n-1$ vérifiant $a_i > a_{i+1}$.

(Olympiades bulgares 1995)