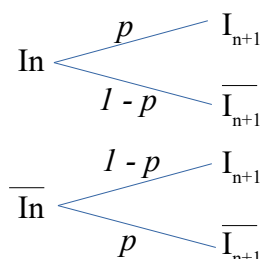


Probabilités

Correction

Exercice 1 :

1) On pose I_n l'événement : "l'information après n transmissions est correcte".



2) D'après la formule des probabilités totales, on sait que :

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= P(I_{n+1}) \\
 &= P(I_{n+1} \cap I_n) + P(I_{n+1} \cap \bar{I}_n) \\
 &= P(I_n) \times P_{I_n}(I_{n+1}) + P(\bar{I}_n) \times P_{\bar{I}_n}(I_{n+1}) \\
 &= p \times p_n + (1-p) \times (1-p_n) \\
 &= (2p-1)p_n + (1-p)
 \end{aligned}$$

3) On a une suite arithmético-géométrique. Sa limite possible vérifie :

$$l = (2p-1) \times l + (1-p) \Leftrightarrow l = 1/2.$$

On pose alors $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ et on vérifie que (u_n) est géométrique de raison $(2p-1)$. En effet,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)p_n + (1-p) - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(p_n - \frac{1}{2}\right).$$

On en déduit $u_n = (2p-1)^n u_0$ avec $u_0 = p_0 - 1/2 = 1/2$. On conclut que

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n.$$

3. On distingue alors trois cas :

- Si $p=1$, l'information est transmise presque sûrement correctement, et $p_n=1$ pour tout entier n .
- Si $p=0$, l'information est presque sûrement mal transmise, et $p_{2n}=1$, $p_{2n+1}=0$ pour tout entier n .
- Si $p \in]0, 1[$, alors $|2p-1| < 1$ et donc (p_n) converge vers $1/2$. On n'a plus de traces de l'information initiale!

Exercice 2:

Vous êtes dans une classe de 30 élèves. Votre prof de maths veut parier avec vous 10 euros qu'au moins deux personnes dans cette classe ont la même date d'anniversaire. Acceptez-vous le pari?

On va chercher la probabilité que deux personnes de la classe aient la même date d'anniversaire. Si elle est supérieure à $1/2$, il ne faut pas accepter le pari. Il est plus facile de calculer la probabilité de l'événement complémentaire. On va donc chercher la probabilité que deux personnes n'ont pas la même date d'anniversaire et, pour simplifier, on va oublier que certaines années comportent un 29 février. Formalisons un peu le problème. Pour que deux personnes n'aient pas la même date d'anniversaire, on doit fabriquer une injection de $\{1, \dots, 30\}$ dans $\{1, \dots, 365\}$. Il y a $365 \times 364 \times \dots \times 336$ telles applications injectives. Il y a total de 365^{30} applications de $\{1, \dots, 30\}$ dans $\{1, \dots, 365\}$. La probabilité que deux personnes aient la même date d'anniversaire vaut donc

$$1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times 336}{365^{30}} = 1 - \frac{364}{365} \times \dots \times \frac{336}{365} \simeq 1 - 0,293 \simeq 0,706$$

Refusez le pari!

Exercice 3:

On considère deux gènes a et b tel que la redondance de l'un d'entre eux (c'est-à-dire le fait de posséder aa ou bb) entraîne l'acquisition d'un caractère C . Anselme et Colette possèdent chacun la combinaison ab et attendent un enfant : il lui transmettrons chacun et indépendamment, soit le gène a , soit le gène b , avec la même probabilité (c'est-à-dire $1/2$).

On considère les événements :

- A = « Colette transmet le gène a »,
- B = « Anselme transmet le gène b »,
- C = « L'enfant présente le caractère C ».

➔ Montrer que les événements A , B et C sont deux-à-deux indépendants.

➔ Montrer que $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$ (c'est à dire que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants).

Exercice 4:

- 60% des étudiants qui vont en TD obtiennent l'examen ;
- 10% des étudiants qui ne vont pas en TD obtiennent l'examen ;
- 70% des étudiants vont en TD.

➔ Quelle proportion des lauréats a séché les cours ?

Exercice 5:

Chez les papous, il y a les papous à poux et les papous pas à poux. La probabilité pour qu'un papou ait des poux vaut $0,1$.

De plus, chez les papous, il y a les papous papas et les papous pas papas. La probabilité pour qu'un papou à poux soit papa vaut $0,6$.

Or, chez les poux, il y a les poux papas et les poux pas papas : la probabilité pour qu'un papou à poux possède au moins un pou papa est de 0,8.

Enfin chez les papous pas papas à poux, la probabilité qu'aucun des poux ne soit papa est de 0,1.

→ On tire au hasard un papou. Quelle est la probabilité pour que ce soit un papa papou à poux papa ?

Exercice 6:

On lance un dé bien équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 ou plus pour la première fois au 4^e lancé ?

Propriété:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et X une v.a., alors $E(aX+b) = aE(X) + b$.

Démonstration 1:

Théorème: (de König-Huygens) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Démonstration:

Démontrer le théorème.

Propriété:

- Soit X une v.a., alors $V(X) \geq 0$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et X une v.a., alors $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Démonstration:

Exercice 7: Soit $f_{(x)} = \frac{1}{8}x$ définie sur $[0, 2]$.

- Montrer que f est une densité.
- Calculer $P(X \in [0, 5; 1])$.

Exercice 8:

Vérifier que la loi uniforme et la loi exponentielle sont bien des lois de probabilités.

Exercice 9:

À partir de 7 heures du matin, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée, représentée par le nombre de minutes après 7h, est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0,30]$. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus?

L'usager attendra moins de cinq minutes si son heure d'arrivée est comprise entre 7h10 et 7h15, ou entre 7h25 et 7h30. Si on note X la variable aléatoire définie par l'énoncé, ceci revient à X appartient à $[10, 15]$ ou X appartient à $[25, 30]$. La probabilité recherchée est donc $\frac{5+5}{30} = \frac{1}{3}$.

Le raisonnement est identique pour déterminer la probabilité qu'il attende plus de dix minutes. Dans ce cas, l'heure d'arrivée doit être comprise entre 7h et 7h05 ou entre 7h15 et 7h20. On trouve à nouveau une probabilité de $1/3$.

Exercice 10:

On souhaite équiper une salle informatique d'ordinateurs. La durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres ordinateurs. La durée de vie d'un ordinateur, en années, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,18$. Combien faut-il au minimum installer d'ordinateurs dans la salle pour que la probabilité de l'événement « L'un au moins des ordinateurs fonctionne encore après 5 ans » soit supérieure à 0,99?

1. On suppose que la salle est équipée de n ordinateurs et on note X_i la durée de vie de l'ordinateur i . L'événement « L'un au moins des ordinateurs fonctionne encore après 5 ans », que nous allons noter A , est encore égal à l'événement $(X_1 \geq 5) \cup (X_2 \geq 5) \cup \dots \cup (X_n \geq 5)$. On cherche n tel que $P(A) \geq 0,99$. Ceci revient à chercher n tel que $P(A^c) < 0,01$. Or,

$$A^c = (X_1 < 5) \cap \dots \cap (X_n < 5),$$

et puisque ces événements sont indépendants,

$$P(A^c) = \prod_{i=1}^n P(X_i < 5).$$

Or, $P(X_i < 5) = (1 - e^{-5\lambda})$ et donc on cherche n tel que

$$(1 - e^{-5\lambda})^n < 0,01.$$

Par croissance du logarithme, ceci est équivalent à

$$n \ln(1 - e^{-5\lambda}) < \ln(0,01),$$

et puisque $\ln(1 - e^{-5\lambda}) < 0$ (car $1 - e^{-5\lambda} < 1$), ceci revient à

$$n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(1 - e^{-5\lambda})} \simeq 8,8.$$

Il faut donc au moins installer 9 ordinateurs dans la salle pour être sûr que l'un au moins fonctionne encore après 5 ans.

2. La probabilité que l'ampoule i fonctionne encore après 4 ans vaut

$$P(T \geq 4) = e^{-4\lambda}.$$

On observe maintenant 10 ampoules, et à chaque ampoule on associe l'épreuve de Bernoulli qui consiste à vérifier si l'ampoule fonctionne encore après 4 ans (succès de cette épreuve). Le succès se produit avec une probabilité égale à $e^{-4\lambda}$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès dans la répétition de 10 épreuves de Bernoulli indépendantes, chacune avec une probabilité $e^{-4\lambda}$ de succès. X suit donc une loi binomiale de paramètres 10 et $e^{-4\lambda}$. On en déduit

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} e^{-28\lambda} (1 - e^{-4\lambda})^3 \simeq 0,074.$$

Exercice 11:

La taille d'un homme âgé de 25 ans suit une loi normale de moyenne 175cm et d'écart-type 6cm.

1. Quel est le pourcentage d'hommes ayant une taille supérieure à 1m85?
2. Parmi les hommes mesurant plus de 1m80, quelle proportion mesure plus de 1m92?

Comme usuellement, on note ϕ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On note aussi $Y = \frac{X-175}{6}$, qui suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. On cherche $P(X > 185)$ qu'on va calculer en renormalisant la loi normale :

$$P(X > 185) = P\left(\frac{X - 175}{6} > \frac{185 - 175}{6}\right) = P(Y > 5/3) = 1 - \phi(5/3) \simeq 0,05.$$

2. C'est le même raisonnement, si ce n'est qu'il faut de plus intervenir une probabilité conditionnelle :

$$P(X > 192 | X > 180) = \frac{P(X > 192 \cap X > 180)}{P(X > 180)} = \frac{P(X > 192)}{P(X > 180)}.$$

On mène les calculs comme précédemment, et on trouve

$$P(X > 192 | X > 180) = \frac{1 - \phi(17/6)}{1 - \phi(5/6)} \simeq 0,01.$$

Exercice 12:

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

Montrer que pour tout $s, t \in \mathbb{R}^+$, $P_{X>t}(X > s+t) = P(X > s)$. Cette propriété se traduit en disant que la variable aléatoire X est sans mémoire.

$$P_{X>t}(X > s+t) = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)} = \frac{1 - P(X \leq s+t)}{1 - P(X \leq t)} = \frac{1 - \int_0^{s+t} \lambda e^{-\lambda x} dx}{1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{1 - [-e^{-\lambda x}]_0^{s+t}}{1 - [-e^{-\lambda x}]_0^t} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

Exercice 13:

Les 100 passagers, d'un avion de 100 places, entrent dans l'appareil l'un après l'autre, dans l'ordre du numéro de leur carte d'embarquement (ex : le 4ème passager a réservé le siège numéro 4). Ils ont chacun une place réservée, mais la première personne à monter dans l'avion est une vieille folle qui s'assoit sur une place choisie au hasard de façon équiprobable.

Puis, chacun des autres, à son tour, va s'asseoir à sa place réservée si elle est encore libre ou, dans le cas contraire, s'installe au hasard et de façon équiprobable sur n'importe laquelle des places restantes.

➔ Quelle est la probabilité que le 100ème passager se soit finalement assis à sa place réservée ?

Indication : observer les cas $n=100$ et $n=1$ puis $n=99$, $n=98$, ... et montrer, par récurrence forte, que cette probabilité vaut $\frac{1}{2}$ (n étant la place choisie par la vieille dame).

Exercice 14:

Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $2n+1$ boules indiscernables au toucher et numérotées $0, 1, 2, \dots, 2n$. On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

- on tire trois boules simultanément ;
- si les trois boules tirées ont pour numéros a, b et c , avec $a < b < c$, on élimine les boules de numéros a et c et on replace dans le sac la boule de numéro b ;
- on recommence les opérations précédentes.

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro. Pour tout entier k , on note $P(D_n=k)$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro k .

1.
 - a) Déterminer la loi de la v.a. D_1 .
 - b) Déterminer la loi de la v.a. D_2 .
2. Déterminer $P(D_n=0)$ et $P(D_n=2n)$.
3. Déterminer $P(D_n=1)$ en fonction de n .
4. Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq 2n$. Pourquoi a-t-on $P(D_n=i) = P(D_n=2n-i)$?
5. Calculer l'espérance de la v.a. D_n en fonction de n .

➤ Cf la correction de Thomas Ravary, Problème 2, p3. Le sujet original est aussi donné.

Exercice 15 :

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

1) Posons la variable aléatoire X dont la valeur p est comprise entre 1 et n se définit par : la bonne clé est trouvée au $p^{\text{ième}}$ essai.

On a par construction :

$$P(X=1) = \frac{1}{n},$$

$P(X=2) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$ puisque y arriver du second coup suppose qu'on n'ait pas trouver du premier (et le nombre de clé diminue d'une unité à chaque fois),

$$P(X=3) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$$

...

$$P(X=p) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{1}{n-p+1} = \frac{1}{n}$$

Le nombre moyen d'essai est alors de :

$$E(X) = \sum_{p=1}^n p \times P(X=p) = \frac{1}{n} \times \sum_{p=1}^n p = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

2) La probabilité de trouver la bonne clé reste égale à $\frac{1}{n}$ puisque il n'y a qu'une seule bonne clé.

Soit Y la variable aléatoire qui donne combien d'essai il a fallu faire pour trouver la bonne clé.

Manifestement, Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{n}$

Le nombre moyen d'essai est égal à $E(Y) = \frac{1}{p} = n$.