Probabilités (2)

Soit Ω un ensemble, appelé univers.
On note $\mathbb{P}(\ldots)$ la probabilité d'un évènement.

I) Propriétés et relations utiles

Propriété(s) 1.

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
- Si les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont deux-à-deux disjoints, alors
$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$
- Si A est un évènement et $\bar{A}$ son évènement contraire, alors
$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$
- **[Formule d'inclusion-exclusion]**
Si A et B sont deux évènements, alors
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$
- **[Formule des probabilités totales]**
Si $A_1, \ldots, A_n$ forment un système complet (*la réunion des évènements est égal à Ω et les (A_i) sont tous deux-à-deux disjoints*), alors pour tout évènement B, on a
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

Définition 2.

Soit A et B deux évènements. On dit que A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Exemple. Dans un jeu de 32 cartes, on note C : « la carte tirée est un coeur » et R : « la carte tirée est un roi ». On a
$$\mathbb{P}(C \cap R) = \mathbb{P}(\text{« la carte tirée est le roi de coeur »}) = \frac{1}{32},$$
et
$$\mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(R) = \frac{8}{32} \times \frac{4}{32} = \frac{1}{32}.$$
Donc les évènements C et R sont indépendants.

Remarque. Ne pas confondre évènements indépendants et évènements incompatibles.

Des évènements indépendants ne s'influencent pas entre eux alors que des évènements incompatibles ne peuvent pas être réalisées en même temps.

II) Probabilités conditionnelles

Définition 3.
Soit A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le nombre noté $\mathbb{P}_B(A)$ (ou $\mathbb{P}(A|B)$) :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Exemple. On pioche au hasard une carte dans un jeu non truqué de 32 cartes. On a

$$\mathbb{P}_{\text{« dame »}}(\text{« coeur »}) = \frac{\mathbb{P}(\text{« dame de coeur »})}{\mathbb{P}(\text{« dame »})} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{4}{32}} = \frac{1}{4}.$$

Propriété(s) 4.
Soit A et B deux évènements,

$$\mathbb{P}_B(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(A).$$

Proposition 5.
Soit A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$.

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).$$

★ **Exercice :** On considère deux gènes a et b tel que la redondance de l'un d'entre eux (c'est-à-dire le fait de posséder aa ou bb) entraîne l'acquisition d'un caractère C.
Anselme et Colette possèdent chacun la combinaison ab et attendent un enfant : il lui transmettrons chacun et indépendamment, soit le gène a, soit le gène b, avec la même probabilité (c'est-à-dire $\frac{1}{2}$).
On considère les événements :

- A = « Colette transmet le gène a ».
- B = « Anselme transmet le gène b ».
- C = « L'enfant présente le caractère C ».

Montrer que les évènements A, B et C ne sont pas indépendants, mais seulement deux-à-deux indépendants.

Solution. Par hypothèse, les évènements A et B sont indépendants. Ainsi,

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

De plus,

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

On a donc

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$$

De même avec $\mathbb{P}(B \cap C)$ et

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$$

mais

$$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Les évènements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants mais seulement deux-à-deux indépendants.

Proposition 6 (Formule de BAYES simplifiée)**.**
Soit A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Démonstration. On a $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)$,
d'où $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ □

★ **Exercice :**
— 60% des étudiants qui vont en TD obtiennent l'examen ;
— 10% des étudiants qui ne vont pas en TD obtiennent l'examen ;
— 70% des étudiants vont en TD.
Quelle proportion des lauréats a séché les cours ?

Solution. On note A l'évènement « être assidu au TD ». On a $\mathbb{P}(A) = 0,7$ et donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0,3$.
On note L l'évènement « obtenir l'examen », on a $\mathbb{P}_{\overline{A}}(L) = 0,1$ et $\mathbb{P}_A(L) = 0,6$. On obtient donc

$$\mathbb{P}_L(\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}_{\overline{A}}(L) \times \mathbb{P}(\overline{A})}{\mathbb{P}(L)}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L) &= \mathbb{P}(\overline{A} \cap L) + \mathbb{P}(A \cap L) \\ &= \mathbb{P}_{\overline{A}}(L) \times \mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}_A(L) \times \mathbb{P}(A) \\ &= 0,1 \times 0,3 + 0,6 \times 0,7 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbb{P}_L(\overline{A}) = \frac{0,1 \times 0,3}{0,45} = \frac{1}{15} \simeq 0,07.$$

Proposition 7.
Soit A et B deux évènements tels que $A \subset B$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A).$$

Démonstration. Comme $A \subset B$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$, d'où $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$. □

★ **Exercice :** Chez les papous, il y a les papous à poux et les papous pas à poux.
La probabilité pour qu'un papou ait des poux vaut $0,1$.
De plus, chez les papous, il y a les papous papas et les papous pas papas.
La probabilité pour qu'un papou à poux soit papa vaut $0,6$.
Or, chez les poux, il y a les poux papas et les poux pas papas : la probabilité pour qu'un papou à poux possède au moins un pou papa est de $0,8$.

On tire au hasard un papou. Quelle est la probabilité pour que ce soit un papa papou à poux papa ?

Solution. On a :

$$\mathbb{P}(P_3) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}_{P_1}(P_2) \times \mathbb{P}_{P_2}(P_3) = 0,1 \times 0,6 \times 0,8 = 0,048.$$

III) Variables aléatoires discrètes

Définition 8.

Une variable aléatoire (v.a.) X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$.

1) Définition

Il s'agit du cas où la v.a. observée ne prend qu'un nombre fini de valeurs possibles.

Définition 9 (Loi d'une v.a. discrète)**.**
Soit X une v.a. définie sur Ω prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
La loi de X est la donnée de $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2) Exemples de loi classiques

Nom	Paramètre(s)	Support	$\mathbb{P}(X = k)$	Exemple(s)
Loi de Bernoulli	$p \in]0, 1[$	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$ $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	Tirage dans une urne pile ou face biaisé.
Loi binômiale	$p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$	$\{0, \ldots, n\}$	$\mathbb{P}(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$	Nombre de succès pour n tirages avec remise.
Loi géométrique	$p \in]0, 1[$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$	Temps du premier succès pour des tirages avec remise.
Loi uniforme	Un ensemble E fini de cardinal n	E	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$	Phénomènes équiprobables.

Remarque. On vérifie (hors-programme) que la somme des $\mathbb{P}(X = k)$ pour k dans le support de la loi vaut 1.

IV) Variables aléatoires continues

1) Définition

Définition 10 (densité)**.**
On dit qu'une fontion f est une densité si f est définie, continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que $\displaystyle\int_I f(x)\mathrm{d}x = 1$.
Si X est une variable aléatoire continue de densité f sur $I = [a, b]$, la probabilité de l'évènement $\{X \in [a, b]\}$ est égal à l'aire sous la courbe de f sur $[a, b]$, soit

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

★ *Exemple.* Soit $f(x) = \frac{1}{2}x$ définie sur $[0, 2]$. Montrer que f est une densité.

f est une fonction linéaire donc définie, continue et positive (car $\frac{1}{2} > 0$) sur $[0, 2]$. De plus,

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1.$$

On en conclut que f est une densité.

Remarque. Dans le cas de v.a. continue, on a

$$\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad ; \qquad \mathbb{P}(X \leqslant a) = \mathbb{P}(X < a)$$

2) Exemples de lois classiques

Notation.

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Nom	Paramètre(s)	Support	Densité	Exemple(s)
Loi uniforme	$a, b \in \mathbb{R},\ a < b$	$[a,b]$	$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	Phénomènes équiprobables
Loi exponentielle	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	Durée de vie.
Loi normale	$m \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	Modéliser des petites erreurs ou variations aléatoires.

Remarque. On vérifie (hors-programme) que l'intégrale de chaque densité sur $\mathbb{R}$ vaut 1.

V) Espérance et variance

Définition 11 (Espérance d'une v.a. discrète)**.**

Soit X une v.a. discrète prenant les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ ($n \geqslant 1$).
Son espèrance, notée $\mathbb{E}(X)$ est le nombre

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Exemple. Soit X la v.a. discrète de loi uniforme sur $\{0, \ldots, n\}$ où $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{i=0}^{n} k\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} k = \frac{1}{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}.$$

Définition 12 (Espérance d'une v.a. continue)**.**

Soit X une v.a. continue ayant pour densité f sur l'intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$).
Son espérance, notée $\mathbb{E}(X)$ est le nombre

$$\mathbb{E}(X) = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Propriété(s) 13.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et X une v.a. , alors $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Définition 14 (Variance)**.**

Soit X une v.a. . Sa variance, notée $\mathbb{V}(X)$ est le nombre

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2].$$

Théorème 15 (de König-Huygens)**.**

Soit X une v.a. .
On a $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$.

★ **Exercice :** Démontrer ce théorème.

Solution. On a :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(X) & = & \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2] & \\
& = & \mathbb{E}[X^2-2X\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(X)^2] & \\
& = & \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(2X\mathbb{E}(X))+\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X)^2\right] & \text{par linéarité de l'espérance} \\
& = & \mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(X)^2 & \text{l'espérance d'une constante est cette constante.} \\
& = & \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2 &
\end{array}$$

Propriété(s) 16.

Soit X une v.a. , alors $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.

Propriété(s) 17.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et X une v.a. , alors $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Propriété(s) 18 (Espérance, variance sous condition d'indépendance)**.**

Soient X et Y deux v.a. indépendantes.

(i) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$;

(ii) $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$.

Espérances et variances des v.a. discrètes usuelles :

Nom	Paramètre(s)	Espérance	Variance
Loi de Bernoulli	$p \in]0,1[$	p	$p(1-p)$
Loi binômiale	$p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$	np	$np(1-p)$
Loi géométrique	$p \in]0,1[$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Loi uniforme	Un ensemble E fini de cardinal n	$\frac{n}{2}$	$\frac{n(n+2)}{12}$

Espérances et variances des v.a. continues usuelles :

Nom	Paramètre(s)	Espérance	Variance
Loi uniforme	$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle	$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Loi normale	$m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$	m	σ^2

★ **Exercice :** Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{P}_{X>t}(X > s+t) = \mathbb{P}(X > s).$$

Cette propriété se traduit en disant que la variable aléatoire X est sans mémoire.

Solution. Pour tout $t \geqslant 0$, on a $\mathbb{P}(X > t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = e^{-\lambda t} > 0$ (admis).
Ainsi,

$$\mathbb{P}_{X>t}(X > s+t) = \frac{\mathbb{P}(\{X > s+t\} \cap \{X > t\})}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s).$$

Exercice 1 : Les 100 passagers d'un avion, de 100 places entre dans l'appareil, l'un après l'autre, dans l'ordre du numéro de leur carte d'embarquement (ex : le 4$^{\text{ème}}$ passager a réservé le siège numéro 4).

Ils ont chacun une place réservée, mais la première personne à monter dans l'avion est une vieille folle qui s'assoit sur une place choisie au hasard de façon équiprobable.

Puis, chacun des autres, à son tour, va s'asseoir à sa place réservée si elle est encore libre ou, dans le cas contraire, s'installe au hasard et de façon équiprobable sur n'importe laquelle des places restantes.

Quelle est la probabilité que le 100$^{\text{ème}}$ passager se soit finalement assis à sa place réservée ?

Indication : observer les cas $n = 2$ puis $n = 3$ et montrer, par récurrence forte, que cette probabilité vaut $\dfrac{1}{2}$.

Solution. Pour tout $n \geqslant 2$, on désigne le nombre de passagers.
On note A_n : « la $n^{\text{ème}}$ personne est assise à sa place réservée ».
On note V_i : « la vieille folle est assise à la $i^{\text{ème}}$ place » pour i compris entre 1 et n.

Montrons par récurrence sur n que $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2}$.

(*i*) *Initialisation :* Pour $n = 2$, on a

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap V_1) + \mathbb{P}(A_2 \cap V_2)$$

Les évènements A_2 et V_2 sont incompatibles donc $\mathbb{P}(A_2 \cap V_2) = 0$.
On en déduit que

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 \cap V_1) = \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}_{V_1}(A_2) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

La propriété est vraie au rang $n = 2$.

(*ii*) *Hérédité :* Supposons que la propriété est vraie jusqu'au rang n. Montrons la au rang $n + 1$.

L'avion comporte $n + 1$ places équiprobables donc $\mathbb{P}(V_i) = \dfrac{1}{n+1}$.
$\{V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}\}$ forment une partition de l'univers.
On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_{n+1} \cap V_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap V_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}_{V_1}(A_{n+1}) + \ldots + \mathbb{P}(V_{n+1}) \times \mathbb{P}_{V_{n+1}}(A_{n+1}) \end{aligned}$$

Pour $2 \leqslant i \leqslant n$, si la vieille folle s'installe à la place i, les passagers situés avant la place i se retrouvent à leur place. Ainsi, le groupe restant se comporte comme s'il n'y avait que $n + 1 - i$ personnes.
Ainsi, $\mathbb{P}_{V_i}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1-i}) = \dfrac{1}{2}$ par hypothèse de récurrence.

De plus, $\mathbb{P}_{V_1}(A_{n+1}) = 1$ et $\mathbb{P}_{V_{n+1}}(A_{n+1}) = 0$.
D'où,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} \times (n-1) + 0\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $n + 1$.

(*iii*) *Conclusion :* Par le principe de récurrence forte, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant 2$.

La probabilité que le 100$^{\text{ème}}$ passager se soit finalement assis à sa place réservée est de $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 : Soit n un entier naturel non nul. Dans un sac, on place $2n + 1$ boules indiscernables au toucher et numérotées $0, 1, 2, \ldots, 2n$.
On vide alors progressivement le sac jusqu'à n'y laisser qu'une seule boule, selon le protocole suivant :

- on tire trois boules simultanément ;
- si les trois boules tirées ont pour numéros a, b et c, avec $a < b < c$, on élimine les boules de numéros a et c et on replace dans le sac la boule de numéro b ;
- on recommence les opérations précédentes.

Au bout de n tirages, il ne reste plus qu'une seule boule, et on note D_n son numéro.
Pour tout entier k, on note $\mathbb{P}(D_n = k)$ la probabilité que la dernière boule restant dans le sac soit celle de numéro k.

(1) (a) Déterminer la loi de la v.a. D_1.

(b) Déterminer la loi de la v.a. D_2.

(2) Déterminer $\mathbb{P}(D_n = 0)$ et $\mathbb{P}(D_n = 2n)$.

(3) Déterminer $\mathbb{P}(D_n = 1)$ en fonction de n.

(4) Soit i un entier tel que $0 \leqslant i \leqslant 2n$. Pourquoi a-t-on $\mathbb{P}(D_n = i) = \mathbb{P}(D_n = 2n - i)$?

(5) Calculer l'espérance de la v.a. D_n en fonction de n.

Solution.

(1) (a) Lorsque $n = 1$, il y a 3 boules dans le sac : 0, 1 et 2. La boule 1 est nécessairement la dernière boule dans le sac. Donc D_1 ne prend que la valeur 1 et $\mathbb{P}(D_1 = 1) = 1$.

(b) Lorsque $n = 2$, il y a 5 boules dans le sac : 0, 1, 2, 3, et 4. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ possibilités pour le tirages des trois boules. Après cela, il reste 3 boules dans le sac et on connaît la dernière boule restante.

Premier tirage	Boules éliminées	Boules restantes	Dernière boule
$0-1-2$	$0-2$	$1-3-4$	3
$0-1-3$	$0-3$	$1-2-4$	2
$0-1-4$	$0-4$	$1-2-3$	2
$0-2-3$	$0-3$	$1-2-4$	2
$0-2-4$	$0-4$	$1-2-3$	2
$0-3-4$	$0-4$	$1-2-3$	2
$1-2-3$	$1-3$	$0-2-4$	2
$1-2-4$	$1-4$	$0-2-3$	2
$1-3-4$	$1-4$	$0-2-3$	2
$2-3-4$	$2-4$	$0-1-3$	1

Il en résulte que la loi de D_2 est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_2 = 1) &= \frac{1}{10}\\
\mathbb{P}(D_2 = 2) &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}\\
\mathbb{P}(D_2 = 3) &= \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

(2) La boule 0, au moment où elle est tirée est nécessairement la boule de plus petit numéro et elle est systématiquement éliminée.
L'évènement $\{D_n = 0\}$ est un évènement impossible, sa probabilité est donc nulle : $\mathbb{P}(D_n = 0) = 0$.
Symétriquement, D_n ne prend pas non plus la valeur $2n$: $\mathbb{P}(D_n = 2n) = 0$.
On note que la variable aléatoire D_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$.

(3) La boule 1 est la dernière boule restante si et seulement si elle figure dans la dernière sélection en même temps que la boule numéro 0. Ce qui signifie que ces deux boules n'ont pas été sélectionnées au cours des $n-1$ premiers tirages. Détaillons ce qu'il se passe :

- Lors du 1er tirage, il y a $\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)!}{3!(2n-2)!} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ tirages différents, dont $\binom{2n-1}{3} = \frac{(2n-1)!}{3!(2n-4)!} = \frac{(2n-3)(n-1)(2n-1)}{3}$ tirages ne contenant ni la boule 0, ni la boule 1.
  La probabilité que les boules 0 et 1 n'apparaissent pas dans le tirage est
  $$\frac{\frac{(2n-3)(n-1)(2n-1)}{3}}{\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}} = \frac{(2n-3)(n-1)}{n(2n+1)}.$$
- Lors du 2e tirage, les boules 0 et 1 sont toujours dans le sac, il y a $\binom{2n-1}{3} = \frac{(2n-1)!}{3!(2n-4)!} = \frac{(2n-3)(n-1)(2n-1)}{3}$ tirages différents dont $\binom{2n-3}{3} = \frac{(2n-3)!}{3!(2n-6)!} = \frac{(2n-5)(n-2)(2n-3)}{3}$ tirages ne contenant ni la boule 0, ni la boule 1.
  La probabilité que les boules 0 et 1 n'apparaissent pas dans le tirage est
  $$\frac{\frac{(2n-5)(n-2)(2n-3)}{3}}{\frac{(2n-3)(n-1)(2n-1)}{3}} = \frac{(2n-5)(n-2)}{(n-1)(2n-1)}.$$

- ...
- Lors du $(n-2)$e tirage, il reste 7 boules dans le sac et les boules 0 et 1 sont toujours dans le sac, il y a $\binom{7}{3} = 35$ tirages différents dont $\binom{5}{3} = 10$ tirages ne contenant ni la boule 0, ni la boule 1.
  La probabilité que les boules 0 et 1 n'apparaissent pas dans le tirage est $\frac{10}{35}$.
- Lors du $(n-1)$e tirage, il reste 5 boules dans le sac et les boules 0 et 1 sont toujours dans le sac, il y a $\binom{5}{3} = 10$ tirages différents dont $\binom{3}{3} = 1$ tirages ne contenant ni la boule 0, ni la boule 1.
  La probabilité que les boules 0 et 1 n'apparaissent pas dans le tirage est $\frac{1}{10}$.

La probabilité $\mathbb{P}(D_n = 1)$ est égale au produit de toutes ces probabilités :

$$\frac{C_3^{2n-1}}{C_3^{2n+1}} \times \frac{C_3^{2n-3}}{C_3^{2n-1}} \times \ldots \times \frac{C_3^5}{C_3^7} \times \frac{C_3^3}{C_3^5} = \frac{1}{C_3^{2n+1}} = \frac{3}{n(2n-1)(2n+1)}$$

(4) Imaginons que les boules soient numérotées non seulement de 0 à $2n$, mais aussi de $2n$ à 0, chaque boule étant dotée de deux numérotations, i et $2n-i$.
On note D'_n la variable aléatoire égale au numéro auxiliaire de la dernière boule du sac.
D'une part le protocole de l'expérience n'est pas modifié par une numérotation « descendante », D'_n suit la même loi que D_n : $\mathbb{P}(D'_n = i) = \mathbb{P}(D_n = i)$ pour tout i de 0 à $2n$ et d'autre part les issues qui réalisent l'évènement $\{D'_n = i\}$ sont les mêmes que celles qui réalisent l'évènement $\{D_n = 2n - i\}$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(D'_n = i) = \mathbb{P}(D_n = 2n - i)$. On en déduit que $\mathbb{P}(D_n = i) = \mathbb{P}(D_n = 2n - i)$ pour tout i de 0 à $2n$.

(5) La variable aléatoire D_n prend les valeurs entières allant de 1 à $2n-1$. L'espérance mathématique de D_n est :

$$\mathbb{E}(D_n) = \sum_{i=1}^{2n-1} i \times \mathbb{P}(D_n = i).$$

Effectuons le changement d'indexation $k = 2n - i$:

$$\mathbb{E}(D_n) = \sum_{k=1}^{2n-1} (2n-k) \times \mathbb{P}(D_n = 2n-k).$$

En raison de la symétrie des probabilités, on a

$$\mathbb{E}(D_n) = \sum_{k=1}^{2n-1} (2n-k) \times \mathbb{P}(D_n = k).$$

En ajoutant membre à membre la première et la dernière expression de $\mathbb{E}(D_n)$, on obtient :

$$2\mathbb{E}(D_n) = \sum_{k=1}^{2n-1} (k + (2n-k)) \times \mathbb{P}(D_n = k) = \sum_{k=1}^{2n-1} 2n \times \mathbb{P}(D_n = k) = 2n \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{2n-1} \mathbb{P}(D_n = k) \right)}_{=1} = 2n.$$

Par conséquent, $\mathbb{E}(D_n) = n$.

Exercice 3 : Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

(1) Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

(2) En réalité, la soirée était bien arrosée et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

Solution.

(1) Notons X la variable aléatoire du nombre d'essais à effectuer avant d'ouvrir la porte. Il est un peu difficile de calculer directement $\mathbb{P}(X = k)$, nous allons plutôt calculer, pour k allant de 1 à $n-1$, $\mathbb{P}(X > k)$.
L'événement $(X > k)$ est réalisé si et seulement si, la première clé n'a pas convenu et la deuxième clé n'a pas convenu, et ... , et la k-ième clé n'a pas convenu.
Pour la clé numéro i, il y a une clé parmi $n - i + 1$ qui convenait.
La probabilité que la clé numéro i ne convenait pas est donc $1 - \frac{1}{n-i+1}$.
En notant A_i l'événement « on fait au moins i essais et le i-ième ne convient pas » , on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > k) &= \mathbb{P}(A_k) \\
&= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(A_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_{k-2}}(A_{k-1}) \times \mathbb{P}_{A_{k-1}}(A_k) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n-i+1}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i}{n-i+1} \\
&= \frac{n-k}{n}
\end{aligned}$$

On a ensuite

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) = \frac{n-(k-1)}{n} - \frac{n-k}{n} = \frac{1}{n}.$$

Autrement dit, $X \sim \mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$. Son espérance vaut donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

(2) On garde les mêmes notations. On a $\mathbb{P}_{A_{i-1}}(A_i) = \dfrac{n-1}{n}$ et donc

$$\mathbb{P}(X > k) = \frac{(n-1)^k}{n^k}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{(n-1)^k}{n^k} \\
&= \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} \\
&= \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{n}$, on trouve que $\mathbb{E}(X) = n$.