Evaluation de mathématiques : BTS

Exercice 1 (5,5 points)

Un logiciel donne un développement limité d'une fonction :

```
(%i4) f(x):=1/(1+x^2);
```

(%o4) $f(x):=\dfrac{1}{1+x^2}$

```
(%i5) taylor(f(x), x, 0, 5);
```

(%o5) $1-x^2+x^4+...$

1) De quelle fonction s'agit-il ?
2) A quel ordre ?
3) Au voisinage de quel nombre ?
4) Ecrire mathématiquement le développement limité de cette fonction au voisinage de 0 à l'ordre 2.
5) Ecrire mathématiquement le développement limité de cette fonction au voisinage de 0 à l'ordre 3.
6) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point 0.
7) Etudier la position de la courbe par rapport à sa tangente. Donner une explication.

Exercice 2(2 points) .

Extrait d'un sujet de BTS.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir le développement limité en 0 à l'ordre 3 de f :

$$f(x) = 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

1. On peut dire qu'une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ est :

a) $y = 2$; b) $y = -2 + x$; c) $y = 2 - x$.

2. Au voisinage du point d'abscisse 0,

a) la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de T ;

b) la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de T ;

c) la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de T pour $x < 0$ et au-dessus de T pour $x > 0$.

Exercice 3 (6 points) .

On donne une liste de développements limités.

(%i2) `taylor(exp(x), x, 0, 5);`

(%o2) $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+...$

(%i7) `taylor(log(1+x), x, 0, 5);`

(%o7) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+...$

(%i8) `taylor(sin(x), x, 0, 5);`

(%o8) $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+...$

(%i9) `taylor(cos(x), x, 0, 5);`

(%o9) $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+...$

(%i10) `taylor(1/(1+x), x, 0, 5);`

(%o10) $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+...$

(%i11) `taylor((1+x)^2, x, 0, 5);`

(%o11) $1+2\,x+x^2+...$

(%i13) `taylor((1+x)^3, x, 0, 5);`

(%o13) $1+3\,x+3\,x^2+x^3+...$

En utilisant le DL de $exp(x)$ au voisinage de 0, je peux dire sans calculatrice que

$$exp(0{,}1) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$$

Sans calculatrice, par un petit calcul à la main, trouver :

$$ln(1{,}1) \approx$$

$$sin(0{,}1) \approx$$

$$cos(0{,}1) \approx$$

$$\frac{1}{1{,}1} \approx$$

$$\frac{1}{1{,}1^2} \approx$$

$$\frac{1}{1{,}1^3} \approx$$

Vous pouvez vérifier avec votre calculatrice.

Bonus : *pour vous aider, vous pouvez réaliser des constructions à la calculatrice.*

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -x - \frac{4}{x}$.

Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats suivants, qui ne sont pas à démontrer.

Fichier Editer Cell Maxima Equations Algèbre Calcu

(%i1) `define(f(x),-x-4/x);`

(%o1) $f(x):=-x-\frac{4}{x}$

(%i2) `limit(f(x),x,0,plus);`

(%o2) $-\infty$

(%i3) `limit(f(x),x,inf);`

(%o3) $-\infty$

(%i4) `limit(f(x)-(-x),x,inf);`

(%o4) 0

(%i5) `f(x)-(-x);`

(%o5) $-\frac{4}{x}$

1. a) Expliquer l'argument « plus » apparaissant dans l'instruction limit($f(x)$, x, 0, plus).

b) Que vaut $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? En déduire que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f admet une asymptote, dont on donnera une équation.

2. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

3. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x)\right]$.

b) Interpréter graphiquement le résultat précédent.

4. Donner la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.