PRIMITIVES D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

A. Définition

Exemple

Soit les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 6x^2 - 3$ et $F : x \mapsto 2x^3 - 3x + 4$.

Vérifiez que, pour tout nombre réel x, $F'(x) = f(x)$.

f est la fonction dérivée de F ; on dit que F est **une primitive** de f sur $\mathbb{R}$.

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction F définie sur I est une **primitive** de f sur I lorsqu'elle est dérivable sur I et que $F' = f$.

B. Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle

Soit $f : x \mapsto 2x$, définie sur $\mathbb{R}$.

$F : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$, est une primitive de f puisque $F'(x) = f(x)$.

De même $F_1 : x \mapsto x^2 + 1$, $F_2 : x \mapsto x^2 - 4$, …, sont des primitives de f.

f admet-elle d'autres primitives sur $\mathbb{R}$ que les fonctions $x \mapsto x^2 + C$ où C est une constante réelle ?

La réponse est donnée par le théorème suivant que nous admettons.

THÉORÈME

Si f est une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est constitué des fonctions définies sur I par $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante réelle.

Exemple

Les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 3$ sont les fonctions $x \mapsto x^3 - 3x + C$ où C est une constante réelle.

Remarque

Parmi les primitives de la fonction f définie dans l'exemple ci-dessus, cherchons s'il existe une fonction F telle que $F(2) = 6$.
F convient si et seulement si $F(x) = x^3 - 3x + C$ avec $2^3 - (3 \times 2) + C = 6$, c'est-à-dire $C = 4$.
Il existe donc une primitive unique de f prenant la valeur 6 pour $x = 2$; c'est $F : x \mapsto x^3 - 3x + 4$.

Plus généralement nous pouvons démontrer de la même façon le théorème suivant :

THÉORÈME

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.

Parmi les primitives de f définies sur I, il en existe une et une seule prenant une valeur donnée y_0 pour une valeur donnée x_0 de la variable.

C. Primitives des fonctions de référence

La lecture du tableau des dérivées des fonctions de référence dans le sens f' vers f permet d'obtenir les primitives de ces fonctions.

Dans ce qui suit, C est une constante réelle quelconque.

f est définie par	sur	Les primitives F de f sont définies par
$f(x)=a$	$\mathbb{R}$	$F(x)=ax+C$
$f(x)=x$	$\mathbb{R}$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$
$f(x)=x^n$ $n\in\mathbb{Z}^*-\{-1\}$	• $\mathbb{R}$ si n > 0 • $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ si $n<0$ et $n\neq-1$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$	$F(x)=-\frac{1}{x}+C$
$f(x)=\cos x$	$\mathbb{R}$	$F(x)=\sin x+C$
$f(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$	$F(x)=-\cos x+C$
$f(t)=\sin(\omega t+\varphi)$	$\mathbb{R}$	$F(t)=-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)+C$
$f(t)=\cos(\omega t+\varphi)$	$\mathbb{R}$	$F(t)=\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)+C$

Remarque 1

Pour $n=-1$, la fonction $x\mapsto x^n=\frac{1}{x}$ définie sur $]-\infty,0[$ ou sur $]0,+\infty[$ admet des primitives sur l'un et l'autre de ces intervalles mais nous ne les connaissons pas ; le chapitre suivant apportera une réponse.

Remarque 2

En sciences physiques, on utilise les deux derniers résultats de ce tableau de la façon suivante :

- une primitive de $t\mapsto\sin(\omega t+\varphi)$ est :

$$t\mapsto-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)=\frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right),$$

- une primitive de $t\mapsto\cos(\omega t+\varphi)$ est :

$$t\mapsto\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)=\frac{1}{\omega}\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right).$$

Remarque 3

En s'appuyant sur les résultats concernant les opérations sur les fonctions dérivables, on établit que :

- Si F est une primitive de f sur un intervalle I et si G une primitive de g sur I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- Si F est une primitive de f sur un intervalle I, et si a est un nombre réel, alors aF est une primitive de af sur I.

Remarque :

Lorsqu'on demande **une** primitive sans condition particulière, on prend habituellement $C = 0$.

D. Primitives de fonctions de la forme $u'u^n$

Nous avons vu au paragraphe **1A.** qu'une fonction de la forme u^n dérivable sur un intervalle I a pour dérivée $nu'u^{n-1}$.

Donc une primitive d'une fonction de la forme $nu'u^{n-1}$ est u^n.

Nous en déduisons, par multiplication par la constante $\frac{1}{n}$, que, d'après la remarque 3 du paragraphe **2C.** : une primitive d'une fonction de la forme $u'u^{n-1}$ est $\frac{1}{n}u^n$.

En remplaçant n par $n+1$ nous obtenons le résultat dans le tableau suivant.

f est définie sur un intervalle I par :	Les primitives F de f sont définies sur I par :
$f(x) = u'(x)[u(x)]^n,\ n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1} + C$
$f(x) = \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$	$F(x) = -\frac{1}{u(x)} + C$

Remarque

La mise en œuvre des résultats figurant dans ce tableau conduit aux deux observations suivantes.

1. Pour déterminer des fonctions dérivées et des fonctions primitives il faut, dans un cas comme dans l'autre, trouver « la bonne formule ». Mais le problème est plus difficile dans le cas des primitives que dans celui de dérivées car il faut identifier une fonction u et sa dérivée u' et, le plus souvent, choisir une constante multiplicative.
2. **Lorsqu'on a trouvé une primitive d'une fonction, il est prudent de procéder à une vérification en dérivant la primitive obtenue.**

Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{x}{(3x^2+1)^2}$.

SOLUTION

$f(x)$ ressemble à $\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$ (mais ce n'est pas…).

On pose $u(x) = 3x^2 + 1$, alors $u'(x) = 6x$. D'où : $f(x) = \frac{1}{6} \times \left[\frac{6x}{(3x^2+1)^2}\right]$.

Cette écriture de $f(x)$ permet d'avoir « exactement » dans le crochet une expression de la forme $\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$.

Une primitive de la fonction correspondante est définie par $-\frac{1}{u(x)}$, d'après le tableau précédent. Une primitive de f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = \frac{1}{6} \times \left[-\frac{1}{3x^2+1}\right]$, $\quad F(x) = -\frac{1}{6(3x^2+1)}$.