RESUME DE CE QU'IL FAUT SAVOIR EN BTS

Sommaire

TRINOME DU SECOND DEGRE.

Définition : On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + b + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$

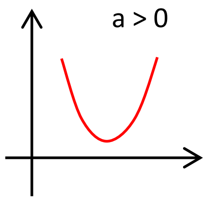
Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + b + c$.
- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + b + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + b + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + b + c = 0$ a deux solutions distinctes :

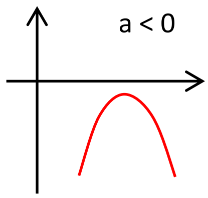
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Signe d'un trinôme

- Si $\Delta < 0$:

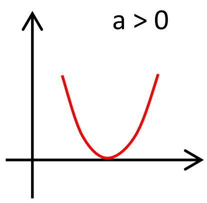
x	$-\infty$	∞
$f(x)$	Signe de a	

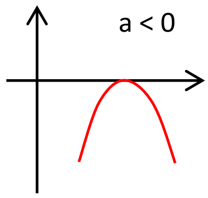




- Si $\Delta = 0$:

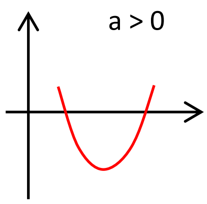
x	$-\infty$	x_0	∞
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

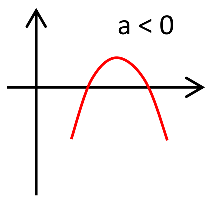




- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	∞
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a





LIMITES DE FONCTIONS.

Énoncés usuels sur les limites

Dans ce qui suit, α peut être remplacé par un nombre fixé a, ou les symboles $-\infty$ et $+\infty$.

• Somme de deux fonctions

Si $\lim_{x\to\alpha} u(x) =$	L			$+\infty$		$-\infty$
et $\lim_{x\to\alpha} v(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x\to\alpha} [u(x)+v(x)] =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$

? signifie que l'on ne peut pas conclure directement.

• Produit d'une fonction par une constante non nulle

Si $\lim_{x\to\alpha} u(x) =$	L	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x\to\alpha} ku(x) =$	kL	$* \infty$	$* \infty$

$*$ correspond soit à $+\infty$, soit à $-\infty$. Le signe + ou – s'obtient de façon évidente dans chaque exemple.

• Produit de deux fonctions

Si $\lim_{x\to\alpha} u(x) =$	L	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim_{x\to\alpha} v(x) =$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{x\to\alpha} [u(x)\times v(x)] =$	LL'	$* \infty$	?	$* \infty$

$*$ correspond soit à $+\infty$, soit à $-\infty$. Le signe + ou – s'obtient de façon évidente dans chaque exemple.

- **Inverse d'une fonction**

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) =$	$L \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1}{u(x)} =$	$\dfrac{1}{L}$	Voir théorèmes 1 et 2	0

Théorème 1

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = 0$ et si, au voisinage de α, on a $u(x) > 0$, alors : $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1}{u(x)} = +\infty$.

Théorème 2

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = 0$ et si, au voisinage de α, on a $u(x) < 0$, alors : $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1}{u(x)} = -\infty$.

Fonctions polynômes et rationnelles au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

- Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction polynôme a même limite que sa fonction monôme de plus haut degré.
- Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction rationnelle a même limite que le quotient des fonctions monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Asymptotes

• Asymptote verticale

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

La droite Δ d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.

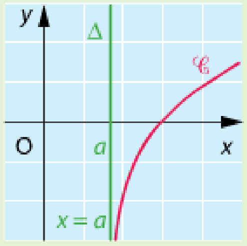


Figure 13

• Asymptote horizontale

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

La droite Δ d'équation $y = L$ est une **asymptote horizontale** de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f.

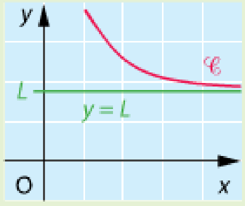


Figure 14

• Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} =]\mathrm{A}, +\infty[$ (ou $\mathrm{I} =]-\infty, \mathrm{A}[$) par $f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$).

La droite Δ d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f (en $+\infty$ ou $-\infty$).

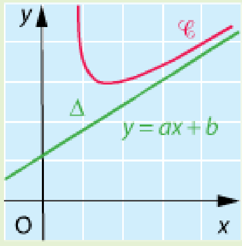


Figure 15

• Position relative d'une courbe représentative et de son asymptote oblique

La position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de son asymptote Δ est donnée par le signe de $f(x) - (ax + b)$ lorsque x varie.

Si, pour tout x de I, $f(x) - (ax + b) \geq 0$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

Si, pour tout x de I, $f(x) - (ax + b) \leq 0$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ.

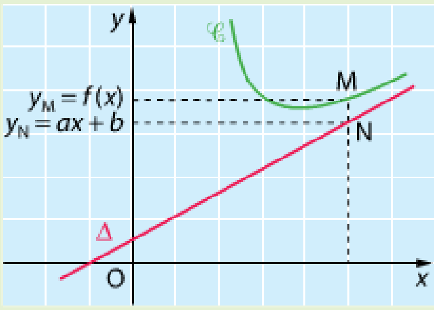


Figure 16

Si, $y_M - y_N = f(x) - (ax + b) > 0$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.

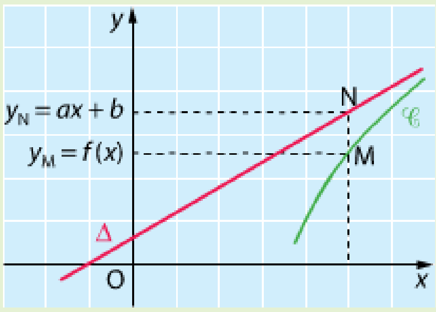


Figure 17

Si, $y_M - y_N = f(x) - (ax + b) < 0$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ.

COMPLEMENTS SUR LES DERIVES.

Rappels de la classe de Première

Dérivées des fonctions usuelles

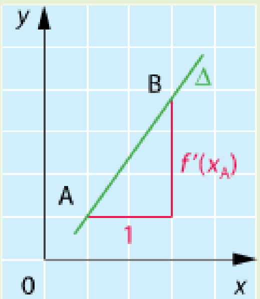
$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$mx+p$	m	$]-\infty, +\infty[$
$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin(\omega t+\varphi)$	$\omega\cos(\omega t+\varphi)$	$\mathbb{R}$
$\cos(\omega t+\varphi)$	$-\omega\sin(\omega t+\varphi)$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivables

$(u+v)'=u'+v'$	$(u^2)'=2u'u$
$(ku)'=ku'$, où k est une constante réelle.	$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$, où $v(x)\neq 0$ pour tout x de I.
$(uv)'=u'v+uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, où $v(x)\neq 0$ pour tout x de I.

Construire une tangente à la courbe représentative d'une fonction f en un de ses points A, d'abscisse x_A

À partir du point donné $A(x_A, y_A)$ où $y_A = f(x_A)$, on obtient un deuxième point B de la tangente Δ en ajoutant 1 à l'abscisse de A et $f'(x_A)$ à l'ordonnée de A : $x_B = x_A + 1$ et $y_B = y_A + f'(x_A)$.



Équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f, dérivable en a, au point d'abscisse a

$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$.

Sens de variation d'une fonction

- Si f est dérivable sur l'intervalle I et si la dérivée f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f est dérivable sur l'intervalle I et si la dérivée f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.
- Si f est dérivable sur l'intervalle I et si la dérivée f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.

Compléments sur la dérivation

$f(x) = [u(x)]^n$, n entier relatif non nul	$f'(x) = nu'(x)\,[u(x)]^{n-1}$
Cas particulier : n = – 1 $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$	$f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$

LES PRIMITIVES

Primitives d'une fonction sur un intervalle

Primitives des fonctions usuelles

F donne la forme générale des primitives sur un intervalle I de la fonction f. C est une constante réelle quelconque.

$f(x)$	$F(x)$	Intervalle de validité
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ n entier non nul positif ou négatif ($n \neq -1$)	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	• si $n > 0$, $\mathbb{R}$ • si $n < 0$, $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x} + C$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$F(t) = -\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + C$	$\mathbb{R}$
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$F(t) = \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + C$	$\mathbb{R}$

Primitives de fonctions de la forme $u'u^n$

Dans ce qui suit, C est une constante réelle quelconque.

f est définie sur I par :	Les primitives F de f sont définies sur I par :
$f(x) = u'(x)[u(x)]^n$ $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1} + C$
Cas particulier : n = – 2 : $f(x) = \dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{u(x)} + C$

FONCTIONS LOGARITHMES.

Définition

La **fonction logarithme népérien**, notée ln, est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui prend la valeur 0 pour $x = 1$.

Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels strictement positifs a, b, pour tout nombre entier relatif n,

- $\ln ab = \ln a + \ln b$;
- $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$; $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$;
- $\ln a^n = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

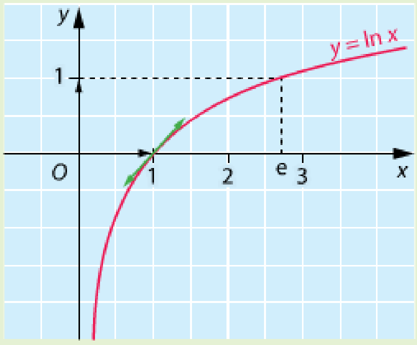
Limites

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Pour tout nombre entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Variations – Courbe représentative

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln'(x) = \frac{1}{x}$			+		
Variations de ln		$-\infty$	0		$+\infty$



Le nombre e

- **e** est le nombre réel défini par : $\ln \mathrm{e} = 1$ ($\mathrm{e} \approx 2{,}718$).
- Pour tout nombre entier relatif n : $\ln \mathrm{e}^n = n$.

Dérivée de ln u

Soit u une fonction dérivable et *strictement positive* sur un intervalle I.

La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Primitives de $\frac{u'}{u}$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout élément x de I, $u(x) > 0$.

Les primitives de la fonction f définie sur I par $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont définies sur I par :

$F(x) = \ln[u(x)] + C$ où C est une constante réelle.

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Définition de la fonction $x \mapsto \exp(x)$

- La **fonction exponentielle**, notée exp, est la fonction qui a tout nombre réel x associe le nombre **strictement positif** unique y tel que $x = \ln(y)$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\exp : x \mapsto y = \exp(x)$ si et seulement si $x = \ln(y)$.

Notation e^x

- Pour tout nombre réel x, $\mathbf{\exp x = e^x}$.
- Pour tout nombre réel x, $\mathbf{\ln(e^x) = x}$.
- Pour tout nombre réel $a > 0$, $\mathbf{e^{\ln(a)} = a}$.

Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels a et b,

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$;
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ et $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$;
- Pour tout nombre réel a et tout nombre entier relatif n, $(e^a)^n = e^{na}$.

Dérivée

Si pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ **alors** $f'(x) = e^x$.

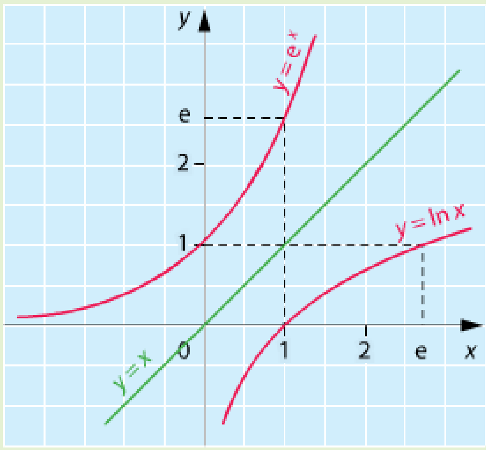
Limites en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Tableau de variation et courbe représentative

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x) = e^x$		$+$	
$f(x) = e^x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout nombre réel x, $\mathbf{e^x > 0}$.



Dérivée de e^u

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et : $(e^u)' = u'e^u$.

Primitives de $u'e^u$

Si sur un intervalle I une fonction f est telle que $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ alors les primitives F de f sur I sont définies par $F(x) = e^{u(x)} + C$ (C étant une constante réelle quelconque).

Autres limites

n est un entier naturel.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Fonction exponentielle de base *a*

a est un nombre réel strictement positif.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ est appelée : **fonction exponentielle de base *a*.**

DEVELOPPEMENTS LIMITES

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant O ; n est un entier naturel.

On dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n et une fonction ε tels que :

$$f(x) = P_{(x)} + x^n\varepsilon(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + \cdots \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

Avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

$a_0 + a_1x + a_1x^2 + \cdots \ldots + a_nx^n$ s'appelle la partie régulière.

Propriété :

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en O, de partie régulière $a_0 + a_1x + a_1x^2 + \cdots \ldots + a_nx^n$, alors f est dérivable en 0 et la courbe représentative de f admet une tangente non verticale au point d'abscisse 0, d'équation réduite $y = a_0 + a_1x$

Exemple : $exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Du développement limité de la fonction en 0, on peut en déduire les éléments suivants :

- L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de $exp(x)$ au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$
- De plus $exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ développement limité en 0 à l'ordre 2.

  Donc $exp(x) - (1 + x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

  La fonction $exp(x)$ est au dessus de sa tangente car $\frac{x^2}{2}$ est positif.

Le développement limité sert essentiellement à trouver l'équation de la tangente au point considéré et à trouver la position relative de la courbe de la fonction par rapport à sa tangente.

INTEGRATION.

Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

• Soit f une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle $[a, b]$, et F une primitive de f sur $[a, b]$.

On appelle **intégrale de a à b de f** le nombre réel : $F(b) - F(a)$.

On note : $\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx = F(b) - F(a)}$.

• On lit : « somme de a à b de $f(x)dx$ ».

• On écrit aussi : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$.

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et x un élément quelconque de $[a, b]$.

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur $[a, b]$ prenant la valeur 0 pour $x = a$.

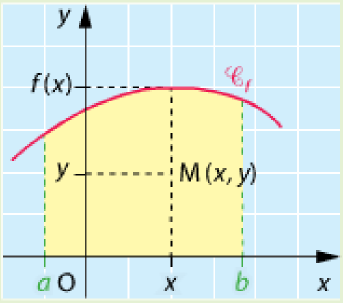
Calculs d'aire

• **f positive sur $[a, b]$**

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a, b]$. L'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan, ensemble des points M de coordonnées x et y telles que :

$a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$,

est : $\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,dx$.



Intégration par parties

Avec U et V deux fonctions dérivables sur un intervalle I et a et b deux réels de I .

$$\int_a^b U' \times V dx = |U \times V|_a^b - \int_a^b U \times V' dx$$

Exemple avec

$$\int_0^1 x \times e^x dx$$

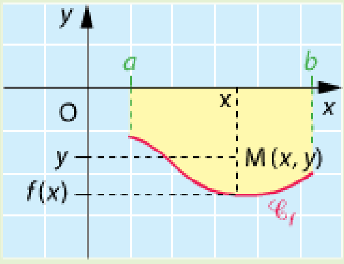
On pose U'=e^x et V = x.
On obtient U = e^x et V'=1
On a donc
$\int_0^1 x \times e^x dx = |x \times e^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1 \times e^1 - 0 \times e^0 - |e^x|_0^1 = e^1 - (e^1 - e^0) = e^1 - e^1 + e^0 = 1$

- ***f* négative sur [*a*, *b*]**

Soit f une fonction dérivable et négative sur un intervalle $[a, b]$. L'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan ensemble des points M de coordonnées x et y telles que :

$a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$,

est : $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (attention au signe moins).

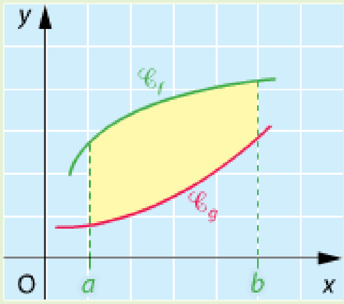


- **Aire limitée par deux courbes**

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ telles que pour tout x de $[a, b]$, $g(x) \leq f(x)$.

L'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par les courbes représentatives de f et g et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est :

$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.



Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ le nombre réel :

$$V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

- **Primitives des fonctions usuelles**

Dans ce qui suit, C est une constante réelle quelconque.

f est définie par	Les primitives de f sont définies par	Intervalle de validité
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$	$]-\infty, +\infty[$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$	$]-\infty, +\infty[$
$f(x) = x^n$ $(n \neq -1)$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	• si $n > 0$: $\mathbb{R}$ • si $n < 0$: $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$	$]0, +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$]-\infty, +\infty[$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	$]-\infty, +\infty[$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	$]-\infty, +\infty[$

• **Primitives des fonctions composées**

Dans les formules suivantes, u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et C une constante réelle quelconque.

f est définie sur un intervalle I par	Les primitives F de f sont définies sur I par
$f(x)=u'(x)[u(x)]^n$ $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	$F(x)=\dfrac{1}{n+1}[u(x)]^{n+1}+C$
$f(x)=\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}+C$
$f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)$ est strictement positif sur I.	$F(x)=\ln[u(x)]+C$
$f(x)=u'(x)e^{u(x)}$	$F(x)=e^{u(x)}+C$
Conséquence $f(x)=e^{kx}$ où k est constante réelle quelconque non nulle	$F(x)=\dfrac{1}{k}e^{kx}+C$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Du premier ordre.

Équation différentielle : $y' + ay = 0$

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (c'est-à-dire $y' = -ay$) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$\boldsymbol{x \mapsto ke^{-ax}}$, où k est une constante réelle quelconque.

Équation différentielle : $y' + ay = b$

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$\boldsymbol{x \mapsto ke^{-ax} + \frac{b}{a}}$, où k est une constante réelle quelconque.

Du second ordre

Rappels sur la résolution d'une équation du second degré dans le corps des complexes.

Théorème et définition Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes**, qui possède les propriétés suivantes :

(1) l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$;

(2) l'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes ;

(3) $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $\mathbf{i^2 = -1}$;

(4) tout nombre complexe z s'écrit de manière **unique** $\boldsymbol{z = a + ib}$ avec a et b réels.

Propriété Soit l'équation $az^2+bz+c=0$ d'inconnue z, où a, b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$. Le discriminant de cette équation est le réel $\Delta = b^2-4ac$.

(1) Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(2) Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double réelle : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

(3) Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes :

$$z_1 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Technique de résolution.

On cherche à résoudre (E') : $ay''+by'+cy=0$. On résout l'équation caractéristique de (E') :

$$ar^2+br+c=0$$

- Si Δ >0 alors $y(x) = C_1e^{r_1 t} + C_2e^{r_1 t}$ où r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique.
- Si Δ =0 alors $y(x) = (C_1 + C_2t)e^{r\,t}$ où r est la solution de l'équation caractéristique.
- Si Δ <0 alors $y(x) = (C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t))e^{\alpha t}$ où $\alpha + i\beta$ est une solution de l'équation caractéristique.

C_1 *et* C_2 dépendent des conditions initiales.

STATISTIQUES A UNE VARIABLE.

Variance et écart type

Définition

- Soit la série statistique $(x_k\,;n_k)$ où $1 \leqslant k \leqslant r$, d'effectif total N et de moyenne $\overline{x}$.

Le réel $V = \frac{1}{N}[n_1(x_1-\overline{x})^2+\ldots+n_r(x_r-\overline{x})^2] = f_1(x_1-\overline{x})^2+\ldots+f_r(x_r-\overline{x})^2$

est appelé **variance** de la série statistique.

- La racine carrée de la variance, $s=\sqrt{V}$ est appelée **écart type** de la série.

La variance et l'écart type permettent de mesurer la dispersion des valeurs par rapport à la valeur moyenne.
Lorsque les valeurs de la série sont des mesures d'une grandeur dans une unité donnée, par exemple, de longueur en mètres, l'écart type exprime la dispersion dans la même unité.

D'une manière générale on utilise les formules suivantes :

Cas n°1 : la population est donnée par la liste de ses n éléments x_i.
Cas n°2 : la population est donnée par le tableau des effectifs n_i des p classes x_i.
Cas n°3 : la population est donnée par une liste d'intervalles. On utilise alors le centre des classes.
Cas n°4 : La population est donnée par une liste de fréquences.

Cas n°1 Des valeurs isolées	$V = \frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots\ldots.+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots.+{x_n}^2}{n} - \bar{x}^2$
Cas n°2 Des valeurs en paquets	$V = \frac{n_1(x_1-\bar{x})^2+\cdots\ldots.+n_p\left(x_p-\bar{x}\right)^2}{n} = \frac{n_1{x_1}^2+n_2{x_2}^2+\cdots.+n_p{x_p}^2}{n} - \bar{x}^2$
Cas n°3 Des classes de valeurs	$V = \frac{n_1(c_1-\bar{x})^2+\cdots\ldots.+n_p\left(c_p-\bar{x}\right)^2}{n} = \frac{n_1{c_1}^2+n_2{c_2}^2+\cdots.+n_p{c_p}^2}{n} - \bar{x}^2$ Avec c_i le centre des classes.
Cas n°4	$V = f_1(x_1-\bar{x})^2+\cdots\ldots.+f_p\left(x_p-\bar{x}\right)^2 = f_1{x_1}^2+f_2{x_2}^2+\cdots.+f_p{x_p}^2-\bar{x}^2$

Avec des fréquences.	

STATISTIQUES A DEUX VARIABLES.

Nuage de points

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, nous pouvons associer au couple (x_i,y_i) le point M de coordonnées (x_i,y_i). L'ensemble des points obtenus s'appelle **nuage de points** représentant la série statistiques.

Le nuage étant dessiné, on peut essayer de trouver une fonction f telle que la courbe d'équation y=f(x) « passe le plus près possible » des points du nuage. C'est le problème de **l'ajustement**. Lorsqu'une telle fonction existe, on dit qu'il existe une **corrélation** entre les deux séries statistiques.

Point moyen

On appelle point moyen d'un nuage de $\boldsymbol{n}$ points M_i de coordonnées (x_i,y_i), le point G de coordonnées :

$$x_G = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \text{et} \quad y_G = \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Droite de régression linéaire par la méthode des moindres carrés.

On utilise la calculatrice dans un mode statistique à deux variables. Il existe une bonne corrélation entre x et y lorsque $|r|$ est suffisamment voisin de 1. $|r|$ s'appelle le coefficient de corrélation linéaire

PROBABILITES

Probabilités générales.

Probabilités d'événements A, B

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **Événement contraire :** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. En particulier $P(\varnothing) = 0$.
- **Si** $A \cap B = \varnothing$ (événements **disjoints** ou **incompatibles**), alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Probabilités conditionnelles.

Définition :

Soit Ω un univers fini, P une probabilité et B un événement de probabilité p(B) non nulle.

La probabilité sachant que B est réalisé est définie pour tout évènement A par :

$$P_B(A) = \mathrm{P(A/B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{p(B)}$$

Propriétés :

- P_B est une probabilité.
- On retrouve toutes les propriétés des probabilités.

Théorème important :

Pour tous évènements A et B de probabilités non nulles :

$$\mathrm{P(A \cap B)} = P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B)$$

Ce théorème est le plus important car il nous permet d'intervertir Les évènements A et B dans les exercices.

Indépendance de deux événements.

Définition importante :

Les évènements A et B (de probabilités non nulles) sont indépendants si et seulement si,

$$\mathrm{P(A \cap B)=P(A)P(B)}$$

$$\text{Ou} \quad P_B(A) = P(A)$$

Il ne faut pas confondre évènements indépendants et évènements incompatibles.

LOIS DE PROBABILITES

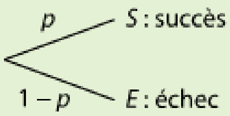
Utilisation de la calculatrice.

$P(X = k)$ TI : **Fdp** Casio **Bdp**

$P(X \leq k)$ loi cumulative TI : **FRep** Casio **Bcd**

Épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli de paramètre p** (nombre réel compris entre 0 et 1) est une épreuve aléatoire comportant deux issues :



Loi binomiale

- La **loi binomiale de paramètres n et p,** notée $\mathcal{B}(n, p)$, est la loi de la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans la répétition, de façon identique et indépendante, de n épreuves Bernoulli de paramètre p.
- **En STI2D-STL, on utilise une calculatrice ou un logiciel pour calculer directement $P(X = k)$ ou $P(X \leq k)$.**
- L'**espérance** de X est : $E(X) = np$.
- La **variance** de X est : $V(X) = np(1 - p)$.
- L'**écart type** de X est : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Loi uniforme sur $[a, b]$

- La **fonction de densité** f est définie sur $[a, b]$ par $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{b-a}}$.
- Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$.

Pour tout $[x_1, x_2]$ inclus dans $[a, b]$, $\boldsymbol{P(X \in [x_1, x_2]) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}}$.

- L'**espérance** de X est $\boldsymbol{E(X) = \frac{a+b}{2}}$.
- La **variance** de X est $\boldsymbol{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$.

Loi exponentielle

- La **fonction de densité** f est définie sur $[0, +\infty[$ par $\boldsymbol{f(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$ où $\lambda > 0$.
- Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

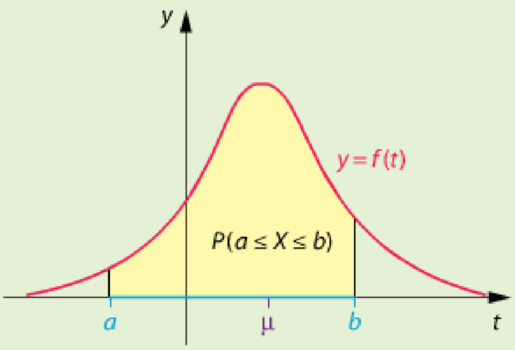
Pour tout $[x_1, x_2]$ inclus dans $[0, +\infty[$, $\boldsymbol{P(X \in [x_1, x_2]) = \int_{x_1}^{x_2} \lambda e^{-\lambda t}\, dt}$.

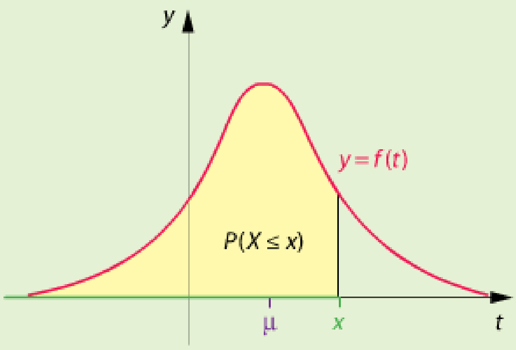
En particulier, pour tout $x \geq 0$, $\boldsymbol{P(X \leq x) = \int_0^{x} \lambda e^{-\lambda t}\, dt}$.

- L'**espérance** de X est $\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$.

Loi normale

- Soit X une variable aléatoire suivant la **loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$** de fonction de densité f.





Les valeurs numériques de a, b et x étant données, on obtient les valeurs numériques de $P(a \leq X \leq b)$ ou $P(X \leq x)$ en utilisant une calculatrice ou un tableur et en remarquant, si nécessaire, que $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - (X \leq a)$.

- Si la variable aléatoire suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$,

$P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) \approx 0{,}6$;

$P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \approx 0{,}95$;

$P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) \approx 0{,}997$.

APPROXIMATIONS DES DIFFERENTES LOIS

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Si n est « **grand** » et si p n'est « ni **trop voisin** de 0 ni **trop voisin** de 1 », alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ admet pour approximation la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de **même espérance** et de **même écart type** :

$\boldsymbol{\mu = np}$ et $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{np(1-p)}}$.

Synthèse des lois.

Nom de la loi	Notation	Formule	E(X) espérance	V(X) variance	$\delta(X)$ écart type
		Lois discrètes			
	X variable aléatoire sur un univers	**La loi de probabilité est un tableau avec p_i et x_i**	$\sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i$	$\sum_{i=1}^{n} p_i \times {x_i}^2 - E(X)^2$	$\sqrt{V(X)}$
Bernoulli (Première)	B(*p*)	P(X=0)=*p* ; P(X=1)=*1-p*	p	$p \times (1-p)$	$\sqrt{p \times (1-p)}$
Binomiale (Première)	B(*n* ;*p*)	**Distribution Calculatrice**	$n \times p$	$n \times p \times\times (1-p)$	$\sqrt{np \times (1-p)}$
Poisson (BTS)	P(λ)	**Distribution Calculatrice**	λ	λ	√λ
		Lois à densités			
		Loi définie à partir d'une fonction de densité f(t) sur un intervalle. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$	$\int_a^b f(t) \times t\,dt$	$\int_a^b f(t) \times t^2\,dt - E(X)^2$	$\sqrt{V(X)}$
Uniforme sur [a ;b] (Terminale)		Fonction de densité $f(x) = \frac{1}{b-a}$ $p(X \in [c,d]) = \frac{d-c}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\sqrt{V(X)}$
Loi exponentielle (Terminale)	Exp(λ)	Sur [0 ;+∞[par $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$
Loi normale (Terminale)	$N(m;\delta)$	**Distribution calculatrice**	m	δ^2	δ

ECHANTILLONNAGE ET ESTIMATION.

L'échantillonnage et l'estimation sont deux problèmes inverses de statistiques. Dans l'échantillonnage, on connaît les paramètres de la population à étudier. On cherche dans quel intervalle on peut retrouver ces paramètres et avec quelle précision.

L'estimation est le problème inverse. On cherche à partir d'un échantillon à estimer les paramètres de la population à étudier.

Posez-vous la question.

- Le réglage d'une machine à partir d'une donnée théorique.
- Un problème de sécurité alimentaire : des germes dans des produits laitiers.
- Le sondage.
- Le calibrage d'un dé pour lutter contre une éventuelle tricherie.

Rappels des théorèmes et techniques utilisés dans ce chapitre.

Loi faible des grands nombres.

Propriété 3
Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes ayant même espérance m et même écart-type σ et soit $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$, alors :

$$\text{Pour tout } \epsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} P(|\overline{X_n} - m| < \epsilon) = 1.$$

Concrètement, ce théorème signifie que plus n est grand plus la variable aléatoire $\overline{X_n}$ se rapproche de l'espérance mathématique m.

C'est le cas typique du lancer d'un dé ou d'une pièce de monnaie. Il faut un certain nombre de lancer pour que la fréquence observée se rapproche de la fréquence théorique.

Théorème de Moivre-Laplace.

Ce théorème est un théorème fondamental en probabilités.
Il permet, lorsque le nombre d'épreuves augmente, d'approcher une loi binomiale par une des principales lois de probabilité : la loi normale.

Théorème (admis) Soit $p \in]0\,;1[$. On suppose que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.
Soit Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Alors, pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$.

Théorème de la limite centrée.

Soit $X_1, X_2, \ldots \ldots, X_n$, *variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la même loi,*

admettant une moyenne μ *et une variance* $\sigma^2 (\sigma \neq 0)$.

Pour n suffisamment grand, la variable aléatoire

$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots \ldots + X_n}{n}$ suit approximativement la loi normale $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

C'est un théorème fondamental largement utilisé dans les sujets de BTS.

Techniques utilisées :

- Bien connaître la loi binomiale et la loi normale. Savoir utiliser sa calculatrice.
- Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.
- Recherche d'un intervalle de confiance dans le cadre d'une loi binomiale.
- Passage d'une loi normale à une loi normale centrée réduite.
- Recherche des $u_\propto$.

Utilisation de la touche Fracnormale ou Invnormale de la calculatrice.
Recherche dans le cas d'une loi normale centrée réduite. Connaître la démonstration.
Recherche dans le cas d'une loi normale quelconque. Technique utilisée dans les sujets d'examen.

Echantillonnage	**Estimation**
Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de α.	Intervalle de confiance d'une mesure au seuil de α. Création de test d'hypothèse.

Intervalle de fluctuation asymptotique.

Xn est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Fn représente la fréquence de succès pour cette loi.

$Fn = \frac{Xn}{n}$ Pour tout $\propto \epsilon[0;1]$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec n assez grand

$p(\frac{Xn}{n} \in I_n) = 1 - \propto$ avec $I_n = [p - u_{\propto}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + u_{\propto}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}]$

L'intervalle I_n est un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance $1-\propto$ de la variable aléatoire fréquence Fn.

Les $u_{\propto}$se trouvent en utilisant la loi normale centrée réduite et la touche fracnormale ou invnormale de la calculatrice.

Retrouver la méthode permettant de trouver les $u_{\propto}$.

Rappel :

La calculatrice permet de calculer $p(X \leq u_{\propto}) = k \;\; avec\; k\; donné.$

On a $p(-u_{\propto} \leq X \leq u_{\propto}) = 2\,p(X \leq u_{\propto}) - 1 = 1-\propto$

Soit $p(X \leq u_{\propto}) = \frac{1+1-\propto}{2}$

$$u_{0,05} = \; 1{,}96\,; u_{0,1} = 2{,}58 \;\; ; u_{0,01} = 3{,}29\,; u_{0,02} = 2{,}32\,; u_{0,2} = 1{,}28$$

Remarques :

Si $n \geq 30, np \geq 5\; et\; n(1-p) \geq 5$ on utilise l'intervalle de fluctuation asymptotique sinon, on utilise l'intervalle [a/n ;b/n] utilisé en liaison avec la loi binomiale.

Rappel :

<u>Définition :</u> On considère une population dont une proportion *p* des individus possède un caractère donné.
On prélève dans cette population un échantillon de taille *n*.
Soit X la variable aléatoire associée au nombre d'individus possédant ce caractère. X suit une loi binomiale de paramètre n et p

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associée à la variable aléatoire X est : $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ où : - a est le plus petit entier tel que : $P(X \leq a) > 0{,}025$,

- b est le plus petit entier tel que : $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

Tableau récapitulatif

Paramètre de la population totale à estimer.	Valeur du paramètre dans l'échantillon de taille n.	Estimation ponctuelle pour la population totale	Estimation par intervalle de confiance pour la population totale
Moyenne	m_e	$m = m_e$	$\left[m_e - u_\propto \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; m_e + u_\propto \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
Ecart type	σ_e	$\sigma = \sigma_e\sqrt{\frac{n}{n-1}}$	
fréquence	f_e	$f = f_e$	$\left[f_e - u_\propto \sqrt{\frac{f_e(1-f_e)}{n-1}} ; f_e + u_\propto \sqrt{\frac{f_e(1-f_e)}{n-1}}\right]$

Construction de tests d'hypothèse

<u>Les étapes de la méthode générale :</u>

<u>Etape 1</u> : choix des hypothèses H_0 et H_1. Détermination du type de test : test bilatéral ou test unilatéral.

<u>Etape 2</u> : choix de la distribution utile pour le test

<u>Etape 3</u> : choix du seuil de signification α. A est la probabilité de rejeter H_0 alors que H_0 est vraie. Il correspond à l'erreur de première espèce.

<u>Etape 4</u> : recherche de la région critique

<u>Etape 5</u> : énoncé de la règle de décision

<u>Etape 6</u> : étude du paramètre de l'échantillon

<u>Etape 7</u> : on applique la règle de décision

<u>Synthèse :</u>

Diminuer le seuil α du test a deux conséquences :

- On réduit l'erreur de première espèce, c'est-à-dire rejeter H_0 alors que H_0 est vraie.
- On augmente la région d'acceptation de H_0.

On augmente ainsi un second risque : celui d'accepter H_0 alors que H_0 est fausse. C'est l'erreur de seconde espèce β. β est la probabilité d'accepter H_0 alors que H_0 est fausse.

Quand α diminue, β augmente et inversement. β s'appelle la puissance du test. C'est la probabilité de rejeter H_0 alors que H_0 est fausse.

<u>Résumé :</u>

		Réalité	
		H_0 est vraie	H_1 est vraie
Conclusion du test	Rejeter H_0	Mauvaise décision Probabilité α Erreur de première espèce.	Bonne décision Probabilité 1-β Puissance du test
	Accepter H_0	Bonne décision Probabilité 1-α	Mauvaise décision Probabilité β Erreur de deuxième espèce.

Application de la méthode à la construction d'un test relatif à une proportion.

Exemple type : le sondage électoral.

Le candidat A affirme que 52% des électeurs veulent voter pour lui. Le candidat B commande un sondage de taille 100 personnes. On observe 43% des personnes votants pour A. Peux-t-on affirmer que le candidat dit vraie ?

Test 1 : test bilatéral avec H_0 : $p=0,52$ et H_1 : $p\neq 0,52$. On choisit comme distribution la loi binomiale $B(100\,;0,52)$ et $\alpha=0,05$.

Test 2 : test bilatéral avec H_0 : $p=0,52$ et H_1 : $p\neq 0,52$. On choisit comme distribution la loi normale $N(0,52\,;\sqrt{\frac{0,52\times 0,48}{100}})$ et $\alpha=0,05$.

Test 3 : test unilatéral avec H_0 : $p=0,52$ et H_1 : $p<0,52$. On choisit comme distribution la loi normale $N(0,52\,;\sqrt{\frac{0,52\times 0,48}{100}})$ et $\alpha=0,05$.

Test 4 : test unilatéral avec H_0 : $p=0,52$ et H_1 : $p<0,52$. On choisit comme distribution la loi normale $N(0,52\,;\sqrt{\frac{0,52\times 0,48}{100}})$ et $\alpha=0,01$.

Ces quatre tests ont des données identiques mais parfois des conclusions différentes.

	Test 1	Test 2	Test 3	Test 4
Etape 1	H_0 : p=0,52 H_1 : p≠0,52	H_0 : p=0,52 H_1 : p≠0,52	H_0 : p=0,52 H_1 : p<0,52	H_0 : p=0,52 H_1 : p<0,52
Etape 2	Distribution pour le test B(100 ;0,52)	Distribution pour le test N(p ; $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$)=N(0,52 ;0,05)	Distribution pour le test N(p ; $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$)=N(0,52 ;0,05)	Distribution pour le test N(p ; $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$)=N(0,52 ;0,05)
Etape 3	Seuil de signification α=0,05	Seuil de signification α=0,05	Seuil de signification α=0,05	Seuil de signification α=0,01
Etape 4	Région critique [0 ;0,42]∪[0,62 ;1]	Région critique [0 ;0,422]∪[0,618 ;1]	Région critique On cherche a tel que $p(X \leq a) = 0{,}05$. On trouve à l'aide de la calculatrice (FracNormal ou InvNormal) [0 ;0,438]	Région critique [0 ;0,404]
Etape 5	Règle de décision Si la proportion f de l'échantillon est dans la région critique, alors l'hypothèse H_0 est rejetée au seuil 5% : l'hypothèse H_1 est acceptée. Sinon l'hypothèse H_0 est acceptée au seuil 5%	Règle de décision Idem	Règle de décision Idem	Règle de décision Idem
Etape 6	Calcul du paramètre de l'échantillon f=0,43	Calcul du paramètre de l'échantillon Idem	Calcul du paramètre de l'échantillon Idem	Calcul du paramètre de l'échantillon Idem
Etape 7	Application de la règle de décision 0,43∉Région critique. On accepte H_0 au seuil 5%	Application de la règle de décision 0,43∉Région critique. On accepte H_0 au seuil 5%	Application de la règle de décision 0,43∈Région critique On rejette H_0 On accepte H_1 au seuil 5%	Application de la règle de décision 0,43∉Région critique. On accepte H_0 au seuil 1%

Comparaison de deux échantillons.

On dispose de deux échantillons A et B d'effectifs respectifs n_A et n_B de moyennes m_A et m_B et d'écart-type σ'_A et σ'_B. On cherche à savoir s'ils ont été prélevés dans la même population.

Pour ce faire on détermine l'écart type ponctuel $\sigma_A = \sqrt{\frac{n_A}{n_A-1}}\sigma'_A$ pour la population A.

On détermine l'écart type ponctuel $\sigma_B = \sqrt{\frac{n_B}{n_B-1}}\sigma'_B$ pour la population B.

La variable aléatoire $\bar{X}_A$ qui a tout échantillon de taille n_A de la population A associe sa moyenne suit la loi normale $N(\mu_A; \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}})$

La variable aléatoire $\bar{X}_B$ qui a tout échantillon de taille n_B de la population A associe sa moyenne suit la loi normale $N(\mu_B; \frac{\sigma_B}{\sqrt{n_B}})$

En supposant $\bar{X}_A$ et $\bar{X}_B$ indépendantes, on considère alors la variable $D = \bar{X}_A - \bar{X}_B$.

D’après les propriétés de l’espérance et de la variance de deux variables aléatoires indépendantes, D suit la loi normale :
$N(\mu_A - \mu_B; \sqrt{\frac{{\sigma_A}^2}{\mathrm{n_A}} + \frac{{\sigma_B}^2}{\mathrm{n_B}}})$
On choisit H_0 : $\mu_A = \mu_B$ comme hypothèse nulle et H_1 : $\mu_A \neq \mu_B$ comme hypothèse alternative (ou H_0 $\mu_A \leq \mu_B$ ou $\mu_A \geq \mu_B$).

Sous l’hypothèse nulle, D suit la loi normale $N(0; \sqrt{\frac{{\sigma_A}^2}{\mathrm{n_A}} + \frac{{\sigma_B}^2}{\mathrm{n_B}}})$.

On fixe un seuil α et on détermine h tel que $P(-h \leq D \leq h) = 1 - \propto$ (dans le cas où $\mu_A = \mu_B$).
La règle de décision permet de tester si $D = \bar{X}_A - \bar{X}_B$ appartient à l’intervalle [-h ;h] ou pas.