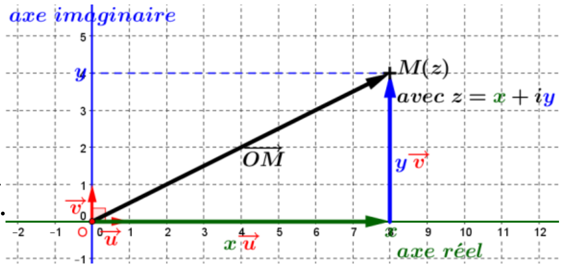
C2. Nombres complexes et géométrie

I/ Représentation géométrique.

1/ Affixe d'un point et d'un vecteur

Le plan est rapporté dans tout ce qui suit à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$.

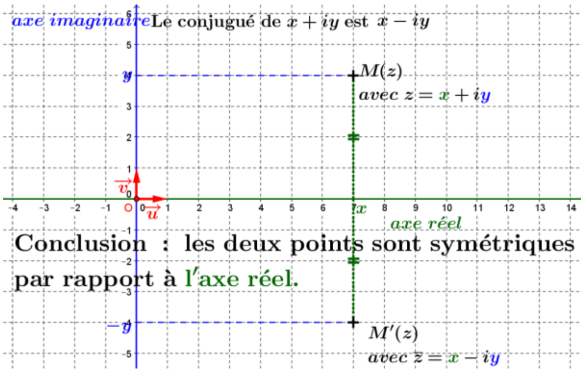
Définitions :



- A tout nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, on associe le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$. On dit que le point **M est le point image de z** et que **$\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z**.
- Tout point $M(x\,;\,y)$ est le point image d'un seul complexe $z = x + iy$. On dit que **z est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$**.
- Le plan est alors appelé **plan complexe**.

Remarques :

- Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé aussi **axe réel**.
- Les **imaginaires purs** sont les affixes des points de l'axe des ordonnées appelé aussi **axe imaginaire**.



Interprétations géométriques du conjugué

Soit M le point d'affixe z telle que $z = x + iy$.

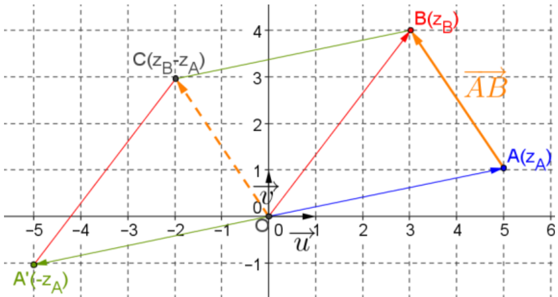
Le point M' d'affixe $\bar{z} = x - iy$ est le symétrique du point M par rapport à l'axe réels.

2/ Propriété

Propriété :

Dans le plan complexe, on considère les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ d'affixes respectives z et z' et k un réel.

- $\vec{w} = \overrightarrow{w'} \Leftrightarrow z = z'$.
- $\vec{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z + z'$.
- $k\vec{w}$ a pour affixe kz.



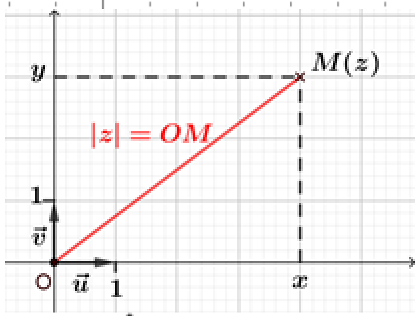
Théorème :

Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Théorème :

Soient A et B deux points d'affixe respective z_A et z_B.

L'affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à $z_B - z_A$.

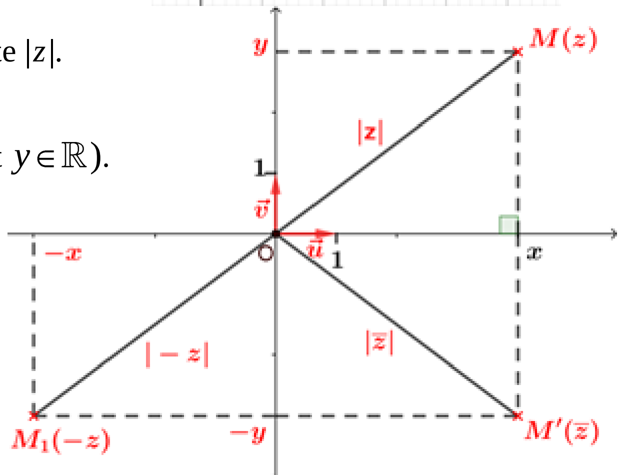


II/ Module

1/ Définitions et propriétés

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul. Soit M le point d'affixe z.
On appelle **module de z** le nombre égal à la distance OM. On le note $|z|$.



Propriété :

Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$).

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- $|-z| = |z|$,
- $|\bar{z}| = |z|$,
- $z \times \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

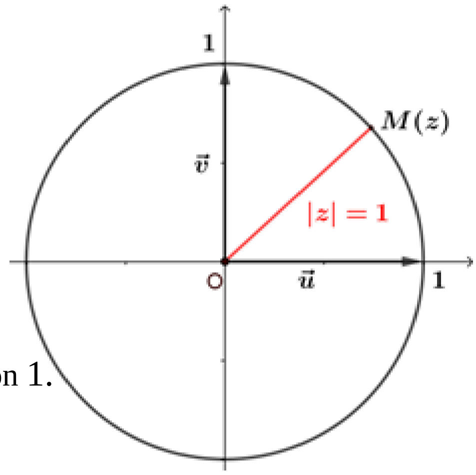
<u>Propriété :</u>

Soient A et B deux points d'affixe respective z_A et z_B. On a : $\left|\boldsymbol{z_B - z_A}\right| = \boldsymbol{AB}$.

<u>Propriété :</u>

Pour tous nombres complexes z, z' et tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$:

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$,
- $|z^n| = |z|^n$,
- $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$ si $z' \neq 0$,
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$.



<u>2/ Ensemble U des nombres complexes de module 1</u>

<u>Définition :</u>

On note U l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = 1$.

Dans le plan complexe, U est représenté par le cercle de centre O et de rayon 1.

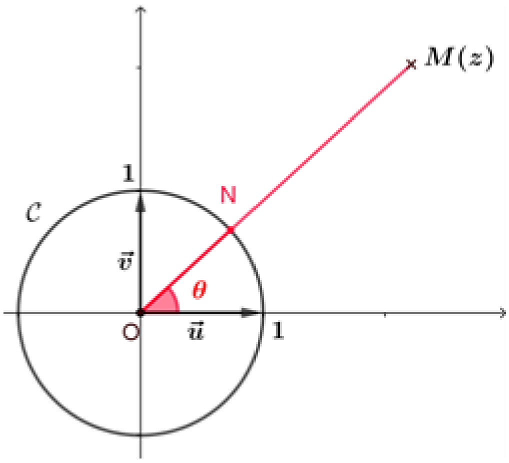
Propriété :

Pour tous nombres complexes z et z' de l'ensemble U :

- $zz' \in$ U,
- $\dfrac{1}{z} \in$ U.

<u>III/ Arguments d'un nombre complexe</u>

<u>1/ Définition et interprétation géométrique</u>



<u>Définition :</u>

Soit z un nombre complexe non nul de point image M du plan complexe, N est le point d'intersection du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et de la demi-droite $[OM)$.

On appelle **argument de z** et on note $arg(z)$ tout nombre θ dont le point N est l'image sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.

Interprétation géométrique

<u>Propriété :</u>

On se place dans un plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\,\vec{v})$.

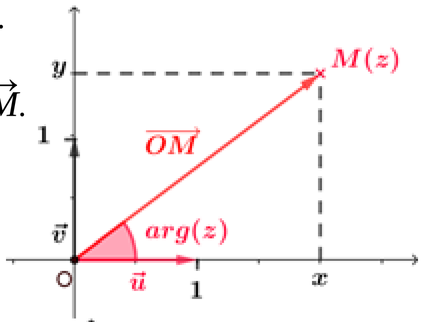
- Soient z un nombre complexe non nul et M le point image associé.

$arg(z)$ est alors une mesure en radian de l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$.

On le note $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = arg(z)\ [2\pi]$.

- Soient z un nombre complexe non nul et $\vec{w}$ le vecteur image associé,

On a $\left(\vec{u}, \vec{w}\right) = arg(z)\ [2\pi]$.



<u>2/ Premières propriétés des arguments</u>

<u>Propriétés :</u>

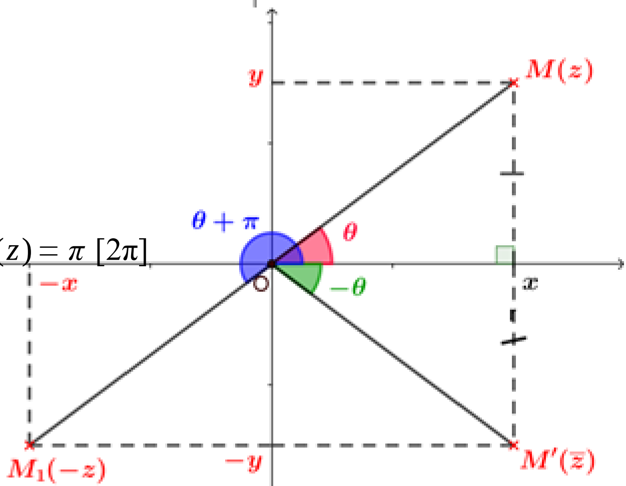
Pour tout nombre complexe non nul z et tout réel k non nul :

- $arg(-z) = arg(z) + \pi\ [2\pi]$ et $arg(\bar{z}) = -arg(z)\ [2\pi]$

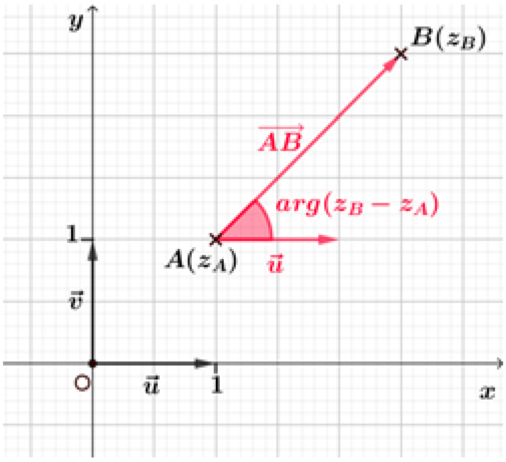
- z est un **nombre réel**, si, seulement si, $arg(z) = 0\ [2\pi]$ ou $arg(z) = \pi\ [2\pi]$

- z est un **nombre imaginaire pur**, si, seulement si,

$$arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$



- Si $k > 0$ alors $arg(kz) = arg(z)\ \ [2\pi]$
- Si $k < 0$ alors $arg(kz) = arg(z) + \pi\ \ [2\pi]$



<u>Propriété :</u>
Soient A et B deux points d'affixe respective z_A et z_B. On a :

- $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OA}\right) = arg\left(z_A\right)$ [2π].
- $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = arg\left(z_B - z_A\right)$.

<u>Propriété :</u>
Soit $z \neq 0$ de forme algébrique $z = x + iy$.
Un argument de z est un réel θ tel que $\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{|z|}$.

<u>3/ Forme trigonométrique</u>

<u>Définition :</u>
Soit z un nombre complexe non nul de module $|z|$ et d'argument θ.
L'expression $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée une **forme trigonométrique de z**.

<u>Propriété :</u>

- Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont **le même module** et **même argument** à un multiple de 2π près.
- Si $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec r un réel strictement positif alors $|z| = r$ et $arg(z) = \theta\ \ [2\pi]$.