Les complexes TD 1

Exercice 1

Sachant que $\mathrm{i}^2=-1$, simplifier l'écriture des expressions suivantes :

a. i^2 b. i^3 c. i^4 d. i^5

e. i^{14} f. i^{100} g. i^{-1} h. i^{-3}

Correction 1

a. $\mathrm{i}^2=-1$

b. $\mathrm{i}^3=\mathrm{i}^2\times\mathrm{i}=(-1)\times\mathrm{i}=-\mathrm{i}$

c. $\mathrm{i}^4=\mathrm{i}^2\times\mathrm{i}^2=(-1)\times(-1)=1$

d. $\mathrm{i}^5=\mathrm{i}^4\times\mathrm{i}=1\times\mathrm{i}=i$

e. $\mathrm{i}^{14}=\mathrm{i}^4\times\mathrm{i}^4\times\mathrm{i}^4\times\mathrm{i}^2=1\times1\times1\times(-1)=-1$

f. $\mathrm{i}^{100}=\big(\mathrm{i}^4\big)^{25}=1^{25}=1$

g. $\mathrm{i}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}\times\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{-1}=-\mathrm{i}$

h. $\mathrm{i}^{-3}=\dfrac{1}{\mathrm{i}^3}=\dfrac{i}{\mathrm{i}^3\times\mathrm{i}}=\dfrac{i}{\mathrm{i}^4}=\dfrac{\mathrm{i}}{1}=\mathrm{i}$

Exercice 2

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1=3\cdot\big(2-\mathrm{i}\big)+\mathrm{i}\cdot\big(3+2\cdot\mathrm{i}\big)$ b. $z_2=\big(5+2\cdot\mathrm{i}\big)\cdot\big(1-\mathrm{i}\big)$

Correction 2

a. $z_1=3\cdot\big(2-\mathrm{i}\big)+\mathrm{i}\cdot\big(3+2\cdot\mathrm{i}\big)=6-3\cdot\mathrm{i}+3\cdot\mathrm{i}+2\cdot\mathrm{i}^2$
$=6+2\cdot(-1)=6-2=4$

b. $z_2=\big(5+2\cdot\mathrm{i}\big)\cdot\big(1-\mathrm{i}\big)=5-5\cdot\mathrm{i}+2\cdot\mathrm{i}-2\cdot\mathrm{i}^2$
$=5-5\cdot\mathrm{i}+2\cdot\mathrm{i}-2\cdot(-1)=5-5\cdot\mathrm{i}+2\cdot\mathrm{i}+2$
$=7-3\cdot\mathrm{i}$

Exercice 3

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1=\big(5+2\cdot\mathrm{i}\big)^2$ b. $z_5=\big(2-\mathrm{i}\big)^2-2\cdot\big(1+3\cdot\mathrm{i}\big)^2$

Correction 3

a. $z_4=\big(5+2\cdot\mathrm{i}\big)^2=25+2\times5\cdot2\cdot\mathrm{i}+(2\cdot\mathrm{i})^2$
$=25+20\cdot\mathrm{i}-4=21+20\cdot\mathrm{i}$

b. $z_5=\big(2-\mathrm{i}\big)^2-2\cdot\big(1+3\cdot\mathrm{i}\big)^2$
$=\big(2^2-2\times2\cdot\mathrm{i}+\mathrm{i}^2\big)-2\cdot\big[1^2+2\times1\times3\cdot\mathrm{i}+(3\cdot\mathrm{i})^2\big]$
$=4-4\cdot\mathrm{i}-1-2\cdot\big(1+6\cdot\mathrm{i}-9\big)$
$=4-4\cdot\mathrm{i}-1-2\cdot\big(-8+6\cdot\mathrm{i}\big)$
$=4-4\cdot\mathrm{i}-1+16-12\cdot\mathrm{i}=19-16\cdot\mathrm{i}$

Exercice 4

Pour tout nombre complexe z admettant l'écriture algébrique $a+\mathrm{i}\cdot b$, avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$, on appelle **conjugué du nombre complexe z**, le nombre complexe, notée $\overline{z}$ définie par : $\overline{z}=a-\mathrm{i}\cdot b$

Donner l'écriture algébrique du conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

a. $z=1+\mathrm{i}$ b. $z=2\cdot\mathrm{i}-3$ c. $z=\mathrm{i}\cdot(1+2\cdot\mathrm{i})$

Correction 4

a. $\overline{z}=\overline{1+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$.

b. $\overline{z}=\overline{2\cdot\mathrm{i}-3}=-2\cdot\mathrm{i}-3=-3-2\cdot\mathrm{i}$.

c. Déterminons l'expression algébrique de z :
$z=\mathrm{i}\cdot(1+2\cdot\mathrm{i})=\mathrm{i}+2\cdot\mathrm{i}^2=\mathrm{i}+2\cdot(-1)=-2+\mathrm{i}$

On en déduit l'écriture algébrique du conjugué de z :
$\overline{z}=\overline{-2+\mathrm{i}}=-2-\mathrm{i}$

Exercice 5*

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1=\dfrac{2}{\mathrm{i}}$ b. $z_2=\dfrac{3}{2-4\cdot\mathrm{i}}$ c. $z_3=\dfrac{-2}{1+\mathrm{i}}$

Correction 5

a. $z_1=\dfrac{2}{\mathrm{i}}=\dfrac{2\cdot\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}=\dfrac{2\cdot\mathrm{i}}{-1}=-2\cdot\mathrm{i}$

b. $z_2=\dfrac{3}{2-4\mathrm{i}}=\dfrac{3\cdot(2+4\cdot\mathrm{i})}{(2-4\mathrm{i})\cdot(2+4\cdot\mathrm{i})}=\dfrac{6+12\cdot\mathrm{i}}{2^2-(4\cdot\mathrm{i})^2}$
$=\dfrac{6+12\cdot\mathrm{i}}{4-16\cdot\mathrm{i}^2}=\dfrac{6+12\cdot\mathrm{i}}{4+16}=\dfrac{6+12\cdot\mathrm{i}}{20}$
$=\dfrac{6}{20}+\dfrac{12}{20}\cdot\mathrm{i}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{5}\cdot\mathrm{i}$

c. $z_3=\dfrac{-2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{-2\cdot(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})\cdot(1-\mathrm{i})}=\dfrac{-2+2\cdot\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^2}=\dfrac{-2+2\cdot\mathrm{i}}{1-(-1)}$
$=\dfrac{-2+2\cdot\mathrm{i}}{2}=-1+\mathrm{i}$

Exercice 6*

On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

$z_1 = 1+\mathrm{i}$; $z_2 = 5-2{\cdot}\mathrm{i}$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

a. $z_1 + z_2$ b. $z_1 - z_2$ c. $z_1 - 2{\cdot}z_2$

d. $z_1 \cdot z_2$ e. $\dfrac{z_1}{z_2}$ f. $\dfrac{z_2}{z_1 - z_2}$

Correction 6

a. $z_1 + z_2 = \big(1+\mathrm{i}\big) + \big(5-2{\cdot}\mathrm{i}\big) = 1+\mathrm{i}+5-2{\cdot}\mathrm{i} = 6-\mathrm{i}$

b. $z_1 - z_2 = \big(1+\mathrm{i}\big) - \big(5-2{\cdot}\mathrm{i}\big) = 1+\mathrm{i}-5+2{\cdot}\mathrm{i} = -4+3{\cdot}\mathrm{i}$

c. $z_1 - 2{\cdot}z_2 = \big(1+\mathrm{i}\big) - 2{\cdot}\big(5-2{\cdot}\mathrm{i}\big) = 1+\mathrm{i}-10+4{\cdot}\mathrm{i}$
$= -9+5{\cdot}\mathrm{i}$

d. $z_1{\cdot}z_2 = \big(1+\mathrm{i}\big)\big(5-2{\cdot}\mathrm{i}\big) = 5-2{\cdot}\mathrm{i}+5{\cdot}\mathrm{i}-2{\cdot}\mathrm{i}^2$
$= 5+3{\cdot}\mathrm{i}-2{\cdot}(-1) = 5+3{\cdot}\mathrm{i}+2 = 7+3{\cdot}\mathrm{i}$

e. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{5-2{\cdot}\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})(5+2{\cdot}\mathrm{i})}{(5-2{\cdot}\mathrm{i})(5+2{\cdot}\mathrm{i})} = \dfrac{5+2{\cdot}\mathrm{i}+5{\cdot}\mathrm{i}+2{\cdot}\mathrm{i}^2}{5^2-(2{\cdot}\mathrm{i})^2}$
$= \dfrac{5+7{\cdot}\mathrm{i}+2{\cdot}(-1)}{25+4} = \dfrac{5+7{\cdot}\mathrm{i}-2}{29} = \dfrac{3+7{\cdot}\mathrm{i}}{29}$
$= \dfrac{3}{29} + \dfrac{7}{29}{\cdot}\mathrm{i}$

f. $\dfrac{z_2}{z_1-z_2} = \dfrac{5-2{\cdot}\mathrm{i}}{\big(1+\mathrm{i}\big)-\big(5-2{\cdot}\mathrm{i}\big)} = \dfrac{5-2{\cdot}\mathrm{i}}{1+i-5+2{\cdot}\mathrm{i}}$
$= \dfrac{5-2{\cdot}\mathrm{i}}{-4+3{\cdot}\mathrm{i}} = \dfrac{\big(5-2{\cdot}\mathrm{i}\big)\big(-4-3{\cdot}\mathrm{i}\big)}{\big(-4+3{\cdot}\mathrm{i}\big)\big(-4-3{\cdot}\mathrm{i}\big)}$
$= \dfrac{-20-15{\cdot}\mathrm{i}+8{\cdot}\mathrm{i}+6{\cdot}\mathrm{i}^2}{(-4)^2-(3{\cdot}\mathrm{i})^2} = \dfrac{-20-7{\cdot}\mathrm{i}-6}{16+9}$
$= \dfrac{-26-7{\cdot}\mathrm{i}}{25} = -\dfrac{26}{25} - \dfrac{7}{25}{\cdot}\mathrm{i}$

