Exercices d'entrainement liés aux warm up

Rappels de cours :

$$\boldsymbol{Formule\ n°1\ :\ I(x_I, y_I)\ milieu\ de\ [AB]} \quad \boldsymbol{I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{Formule\ n°2\ :\ AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

$$\boldsymbol{Formule\ n°3\ :\ \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)}$$

$$\boldsymbol{Formule\ n°4\ :\ \vec{u}\ \ et\ \ \vec{v}\quad \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}, \vec{v})}$$

$$\boldsymbol{Formule\ n°5\ :}\ \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\boldsymbol{Formule\ n°6\ :}\ \vec{u}(x; y)\ \ et\ \ \vec{v}(x'; y')\quad \vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

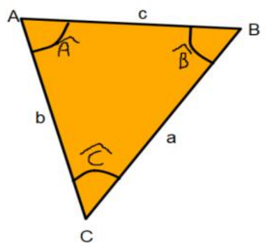
$$\boldsymbol{Formule\ n°}7\ :\quad \vec{u}.\vec{v} = 0\ \Leftrightarrow \vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ sont orthogonaux}$$

Théorème 8 :

Soit A, B et C trois points non alignés du plan et H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$
- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

$$\boldsymbol{Formule\ n°}9\ :\ \text{le théorème d'Al Khashi}$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times cos(\hat{C})$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \times c \times b \times cos(\hat{A})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \times a \times c \times cos(\hat{B})$$

Exercice 1

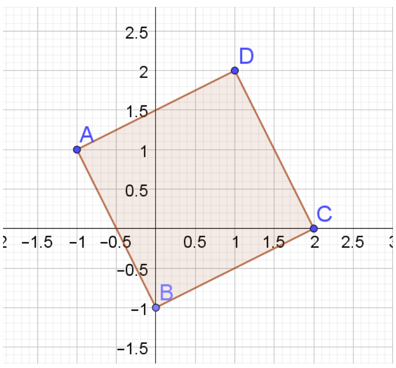
On donne $\|\vec{u}\| = 3{,}5$ $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3\pi}{4}$ Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

Exercice 2

Calculer une distance, des coordonnées de milieu.

Calculer la distance AB avec A(-1 ;-3) et B(-2 ;4) et les coordonnées du milieu I du segment [AB]

Exercice 3



Le repérage.

Donner les coordonnées des points A,B,C et D. Calculer les coordonnées des milieux I et J de [AC] et [BD]. Que peut-on en conclure ? Calculer les distances AC et BD. Que peut-on en conclure ?

Calculer AB et BC. Démontrer AB=BC. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4

Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

Soit A(1 ;1) B(-2 ;4) C(0 ;1) et D(-3 ;4) Placer les points dans un repère.

Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Que peut-on en déduire du quadrilatère ABDC ?

Vérifier en calculant les coordonnées des milieux de [AD] et [BC]. Calculer les distances AB et AC. Le parallélogramme ABDC est-il un losange ?

Exercice 5

Soit A(-1 ;2), B(1 ;1) et C(0 ;-2).

1) Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2) Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$

Exercice 6

On donne $\|\vec{u}\| = 3$ $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = -4$

Calculer $(\vec{u}, \vec{v})$

Exercice 7

Les vecteurs sont-ils orthogonaux ?

$\vec{u}(1; 4)$ et $\vec{v}(-1; 2)$ $\vec{u}(0; 4) et \vec{v}(-1; 0)$

$\vec{u}(1; -1)$ et $\vec{v}(1; 1)$ $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(-y; x)$

Exercice 8

Soit A(-1 ;2), B(1 ;1) et C(0 ;-2).

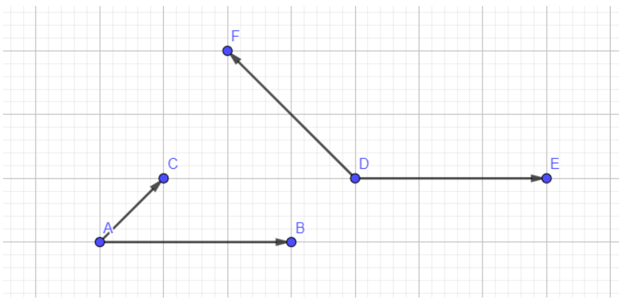
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Calculer l'angle $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$

Exercice 9

Quelle est la valeur de x pour que les vecteurs soient orthogonaux ? $\vec{u}(x; 4)$ et $\vec{v}(-2; x+1)$

Exercice 10

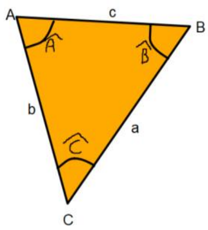


Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF}$

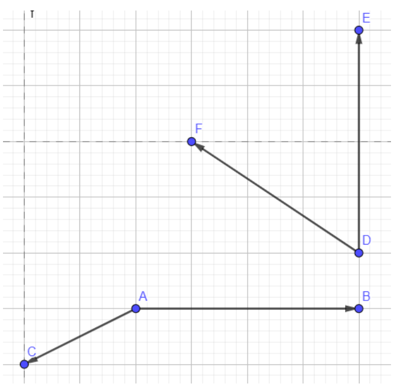
Exercice 11

Théorème d'Al Khashi (1380-1429)

On considère le triangle ABC tel que AB=5, AC=3, BC = 6.
Calculer l'angle $\widehat{BAC}$.



Exercice 12



Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF}$

Solutions :

Exercice 1

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u},\vec{v}) = 3{,}5 \times 2 \times cos(\frac{3\pi}{4}) = 7 \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = -3{,}5\sqrt{2} \approx -4{,}9$$

Exercice 2

A(-1 ;-3) et B(-2 ;4)

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2} \quad et \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$I(-\frac{3}{2};\frac{1}{2})$$

$$AB = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (4-(-3))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

Exercice 3

A(-1 ;1) B(0 ;-1) C(2 ;0) D(1 ;2) I milieu de[AC] et J milieu de [BD]

$$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \quad et \quad y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$I(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$$

$$x_J = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \quad et \quad y_J = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$J(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$$

I=J, les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en un même milieu, c'est donc un parallélogramme.

$$AC = \sqrt{(2-(-1))^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$BD = \sqrt{(1-0)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

Les diagonales sont égales, c'est donc un rectangle.

$$AB = \sqrt{(0-(-1))^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

On a $AB = BC$. Le rectangle possède deux côtés égaux, c'est donc un losange.
Un quadrilatère à la fois rectangle et losange est un carré.

Exercice 4

Soit A(1 ;1) B(-2 ;4) C(0 ;1) et D(-3 ;4)

$$\overrightarrow{AB}(-2-1;4-1) \qquad \overrightarrow{AB}(-3;3)$$

$$\overrightarrow{CD}(-3-0;4-1) \qquad \overrightarrow{CD}(-3;3)$$

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

I milieu de [AD] $\left(\frac{1-3}{2};\frac{1+4}{2}\right)$ I $\left(-1;\frac{5}{2}\right)$ J milieu de [BC] $\left(\frac{-2+0}{2};\frac{4+1}{2}\right)$ J $\left(-1;\frac{5}{2}\right)$ $I = J$ Les diagonales se croisent en un même milieu.

$$AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (4-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(0-1)^2 + (1-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$AB \neq AC$ Le parallélogramme ne peut pas être un losange.

Exercice 5

$\overrightarrow{AB}$(2 ;-1) et $\overrightarrow{AC}(1; -4)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

Exercice 6

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u},\vec{v}) \Leftrightarrow -4 = 6cos(\vec{u},\vec{v}) \Leftrightarrow cos(\vec{u},\vec{v}) = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) = cos^{-1}(-\frac{2}{3}) \approx 132°$

Exercice 7

$\vec{u}(1; 4)$ et $\vec{v}(-1; 2)$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{v} = -1 + 8 = 7$. Les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

$\vec{u}(0; 4)$ et $\vec{v}(-1; 0)$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{v} = 0 + 0 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux.

$\vec{u}(1; -1)$ et $\vec{v}(1; 1)$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{v} = 1 - 1 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux.

$\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(-y; x)$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{v} = -xy + yx = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux.

Exercice 8

$\overrightarrow{AB}$(2 ;-1) et $\overrightarrow{AC}(1; -4)$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 + 4 = 6$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$$(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = cos^{-1}(\frac{6}{\sqrt{5} \times \sqrt{17}}) \approx$$

Exercice 9

$\vec{u}(x; 4)$ et $\vec{v}(-2; x+1)$ *sont orthogonaux si et seulement si* $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow -2x + 4(x+1) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{2} = -2$$

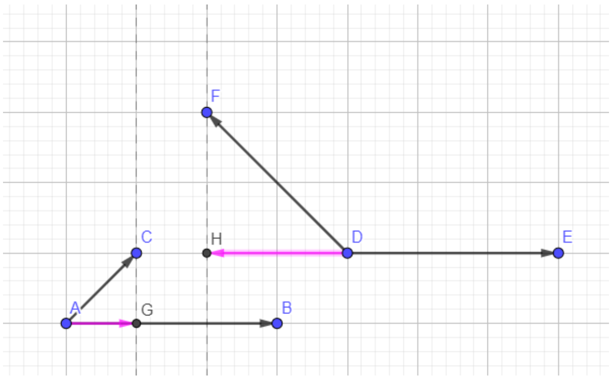
Vérification

$$\vec{u}(-2; 4) \quad et \quad \vec{v}(-2; -2+1)$$

$$\vec{u}(-2; 4) \quad et \quad \vec{v}(-2; -1)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = 4 - 4 = 0$$

Exercice 10



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AG} = 3$

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}.\overrightarrow{\mathrm{DF}} = -DE \times DH = -6$

<u>Exercice 11</u>

D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.ACcos(\widehat{BAC})$$

$$6^2 = 5^2 + 3^2 - 2.AB.ACcos(\widehat{BAC})$$

$$36 = 25 + 9 - 30cos(\widehat{BAC})$$

$$36 = 34 - 30cos(\widehat{BAC})$$

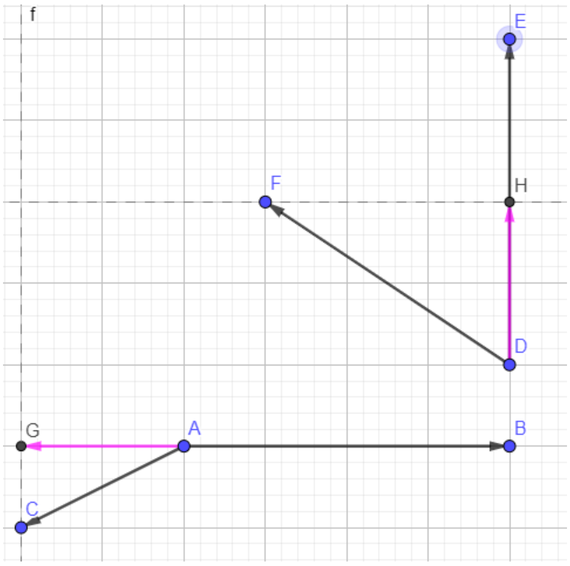
$$36 - 34 = -30cos(\widehat{BAC})$$

$$2 = -30cos(\widehat{BAC})$$

$$cos(\widehat{BAC}) = -\frac{2}{30}$$

$$\widehat{BAC} = cos^{-1}\left(-\frac{2}{30}\right) \approx 94°$$

<u>Exercice 12</u>



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AG = -8$

$\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF} = DE \times DH = 8$