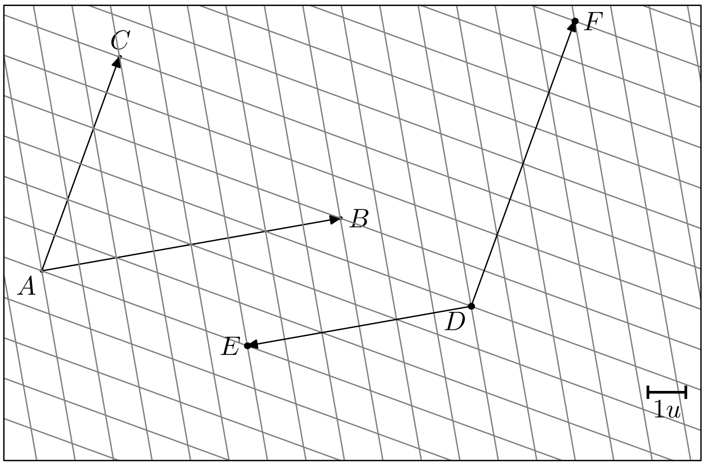
Exercice 1

Dans le plan, on considère les six points et les quatre vecteurs représentés ci-dessous :



On utilisera pour la mesure des longueurs l'unité représenté en bas à droite.

Partie A

1. a. Représenter le point M projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

   b. Déterminer la valeur du produit : $AB{\times}AM$

2. a. Représenter le point N projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).

   b. Déterminer la valeur du produit : $AN{\times}AC$

Définition :

Dans le plan, on considère trois point A, B, C *(on suppose B distinct de A)*. On note H le projeté du point C sur la droite (AB). On définit le **produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$** comme le nombre défini par :

- $AB{\times}AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens
- $-AB{\times}AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens opposés.

On note ce nombre $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

3. Que peut-on dire de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$?

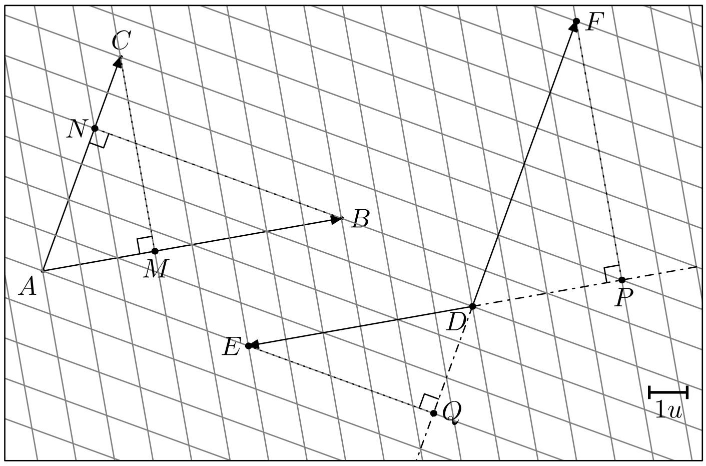
Partie B

4. Montrer que : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=-24$

5. Justifier que : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE}$

Correction 1

Ci-dessous sont représentés l'ensemble des points construits au cours de l'exercice :



Partie A

1. b. $AB{\times}AM=8{\times}3=24$

2. b. $AN{\times}AC=4{\times}6=24$

3. - Le point B admet le point N pour projeté orthogonal sur (AC) et les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens. Par définition du produit scalaire des vecter $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$, on a :
     $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AC{\times}AN=24$
   - Le point C admet le point M pour projeté orthogonal sur (AB) et les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens. Par définition du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$L,, on a :
     $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB{\times}AM=18$

   On remarque que l'égalité : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Partie B

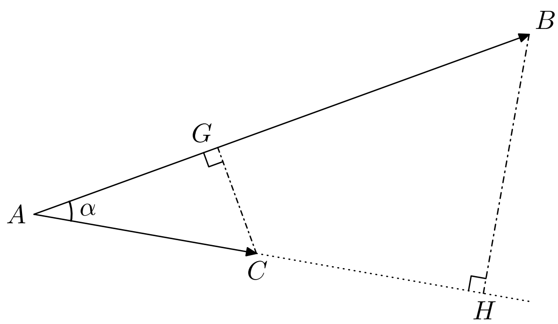
4. Notons P le projeté orthogonal du point F sur la droite (DE).
   Les vecteur $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DP}$ étant colinéaires et de sens opposé, on en déduit :
   $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=-DE{\times}DP=-6{\times}4=-24$

5. Notons Q le projeté orthogonal du point E sur la droite (DF).
   Les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DQ}$ étant colinéaires et de sens opposé, on en déduit :
   $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE}=-DF{\times}DQ=-8{\times}3=-24$

   On en déduit : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE}$

Exercice 2

On considère trois points A, B, C distincts deux à deux représentés ci-dessous :



On note G *(resp. H)* le projeté orthogonal du point C *(resp. B)* sur la droite (AB) *(resp. (AC))* :

1. a. Dans le triangle AGC rectangle en G, donner l'expression de $\cos\alpha$.

   b. Dans le triangle ABH rectangle en H, donner l'expression de $\cos\alpha$.

2. En déduire l'égalité : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Correction 2

Une video est accessible

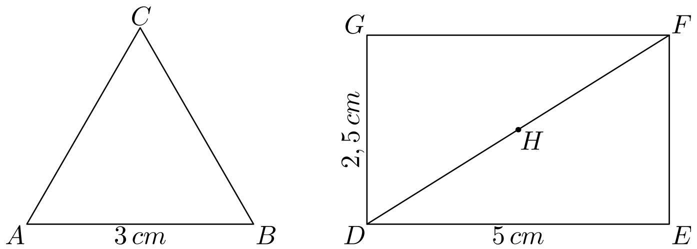
1. a. Dans le triangle AGC rectangle en G, on a la relation trigonométrique :
   $$\cos\alpha = \frac{AG}{AC}$$

   b. Dans le triangle ABH rectangle en H, on a la relation trigonométrique :
   $$\cos\alpha = \frac{AH}{AB}$$

2. - Le point G est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ étant de même sens, on a :
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG} = AB\times AG$$
   $$= AB\times\big(AC\times\cos\alpha\big) = AB\times AC\times\cos\alpha$$
   - Le point H est le projeté orthogonal du point D sur la droite (AC). Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ étant de même sens, on a :
   $$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH} = AC\times AH$$
   $$= AC\times\big(AB\times\cos\alpha\big) = AB\times AC\times\cos\alpha$$

Exercice 3

Dans le plan, on considère les deux configurations ci-dessous :



1. Dans le triangle équilatéral ABC, déterminer les produits scalaires suivants :

   a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ b. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}$

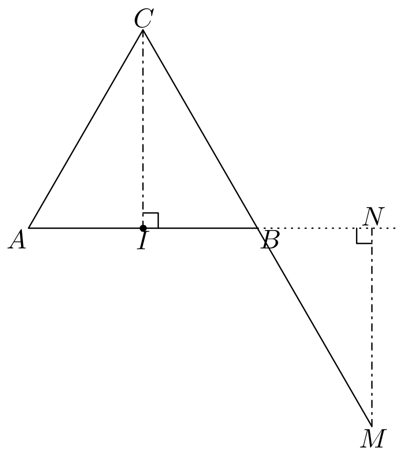
2. Dans le rectangle $DEFG$ où le point H est le milieu de la diagonale $[DF]$, déterminer les produits scalaires :

   a. $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE}$ b. $\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DE}$ c. $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{HD}$

Correction 3

Une video est accessible

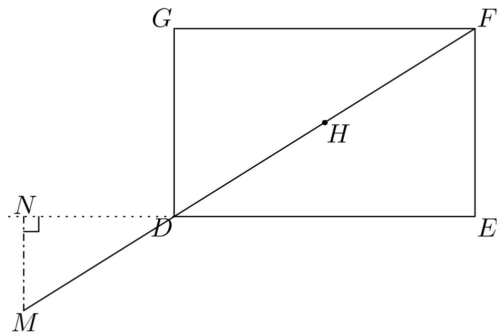
1. Considérons la configuration ci-dessous :



   a. Le projeté du point C sur la droite (AB) est le milieu I du segment $[AB]$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ayant le même sens, on a :
   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB\times AH = 3\times1{,}5 = 4{,}5$$

   b. Le point M a été placé de sorte que :
   $$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BM}$$
   Le projeté orthogonal du point M sur la droite (BA) est le point N.
   Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BN}$ étant de sens opposés, on a :
   $$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BN}$$
   $$= -BA\times BN = -3\times1{,}5 = -4{,}5$$

2. Considérons la configuration ci-dessous :



   a. Le projeté du point F sur la droite (DE) est le point E.
   Le calcul du produit scalaire donne :
   $$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE}$$
   Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DE}$ ayant même sens :
   $$= DE\times DE = 5\times5 = 25$$

   b. Le projeté du point D sur la droite (DE) est le point D. On en déduit :
   $$\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DD}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{0}\cdot\overrightarrow{DE} = 0$$

   c. Dans le triangle DEF rectangle en E, le théorème de Pythagore donne la relation :
   $$DF^2 = DE^2 + EF^2$$
   $$DF^2 = 5^2 + 2{,}5^2$$
   $$DF = \sqrt{25+6{,}25}$$
   $$DF = \sqrt{31{,}25}$$
   On place le point M tel que : $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{DM}$
   Les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DM}$ étant de sens opposés, on en déduit :
   $$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{DM} = -DF\times DM$$
   $$= -\sqrt{31{,}25}\times\frac{\sqrt{31{,}25}}{2} = -\frac{31{,}25}{2} = -15{,}625$$

Exercice 4

On considère le triangle ABC dont les mesures sont :
$AC = 3{,}7\,cm$; $BC = 7\,cm$; $\widehat{ACB} = 48^o$

Les formules d'Al-Kashi appliquées à ce triangle donne :

- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2{\times}AC{\times}BC{\times}\cos\widehat{ACB}$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2{\times}AB{\times}BC{\times}\cos\widehat{ABC}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2{\times}AB{\times}AC{\times}\cos\widehat{BAC}$

Déterminer la mesure, au millimètre près, du segment $[AB]$.

Correction 4

Utilisons la formule :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2{\times}AC{\times}BC{\times}\cos\widehat{ACB}$$
$$= 13{,}69 + 49 - 51{,}8{\times}\cos\big(48\big) = 62{,}69 - 51{,}8{\times}\cos\big(48\big)$$
$$\approx 28{,}029$$

On en déduit la mesure du segment $[AB]$ au millimètre près :
$AB \approx \sqrt{28{,}029} \approx 5{,}294 \approx 5{,}3\,cm$

Exercice 5

On considère le triangle ABC dont les mesures sont :
$AB = 5{,}3\,cm$; $AC = 3{,}7\,cm$; $BC = 7\,cm$

Les formules d'Al-Kashi appliquées à ce triangle donne :

- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2{\times}AC{\times}BC{\times}\cos\widehat{ACB}$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2{\times}AB{\times}BC{\times}\cos\widehat{ABC}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2{\times}AB{\times}AC{\times}\cos\widehat{BAC}$

Déterminer la mesure, au dixième de degrès près, des angles du triangle ABC.

Correction 5

Ainsi, on peut calculer la mesure des trois angles du triangle ABC :

- $$\cos\widehat{ACB} = \frac{AB^2 - AC^2 - BC^2}{-2{\cdot}AC{\times}BC}$$
  $$\cos\big(\widehat{ACB}\big) = \frac{5{,}3^2 - 3{,}7^2 - 7^2}{-2{\times}3{,}7{\times}7}$$
  $$\widehat{ACB} = \cos^{-1}\Big(\frac{5{,}3^2 - 3{,}7^2 - 7^2}{-2{\times}3{,}7{\times}7}\Big)$$
  $$\widehat{ACB} \approx 48{,}0906 \approx 48{,}1^o$$
- $$\cos\widehat{ABC} = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{-2{\cdot}AB{\times}BC}$$
  $$\cos\widehat{ABC} = \frac{3{,}7^2 - 5{,}3^2 - 7^2}{-2{\times}5{,}3{\times}7}$$
  $$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\Big(\frac{3{,}7^2 - 5{,}3^2 - 7^2}{-2{\times}5{,}3{\times}7}\Big)$$
  $$\widehat{ABC} \approx 31{,}3012 \approx 31{,}3^o$$
- $$\cos\widehat{BAC} = \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{-2{\cdot}AB{\times}AC}$$
  $$\cos\widehat{BAC} = \frac{7^2 - 5{,}3^2 - 3{,}7^2}{-2{\times}5{,}3{\times}3{,}7}$$
  $$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\Big(\frac{7^2 - 5{,}3^2 - 3{,}7^2}{-2{\times}5{,}3{\times}3{,}7}\Big)$$
  $$\widehat{BAC} \approx 100{,}6080 \approx 100{,}6^o$$

Exercice 6

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ et les trois points suivants ainsi que leurs coordonnées dans ce repère :

$A(3\,;2)$; $B(5\,;-1)$; $C(-2\,;3)$

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Donner les valeurs des produits scalaires suivants :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$
3. Déterminer les distances AB, AC et BC.
4. Déterminer la mesure des 3 angles du triangle ABC arrondis au degré près.

Correction 6

1. On a les coordonnées suivantes de vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$
     $= (5-3\,;\,-1-2) = (2\,;\,-3)$
   - $\overrightarrow{AC}(-2-3\,;3-2) = (-5\,;1)$
   - $\overrightarrow{BC}(-2-5\,;3-(-1)) = (-7\,;4)$
2. Voici les calculs des produits scalaires demandés :
   - $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2{\times}(-5) + (-3){\times}1 = -10 - 3 = -13$
   - $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \big(-\overrightarrow{AB}\big)\cdot\overrightarrow{BC} = -\big(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\big)$
     $= -\big(2{\times}(-7) + (-3){\times}4\big) = -\big[-14 + (-12)\big]$
     $= -\big(-26\big) = 26$
   - $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = \big(-\overrightarrow{BC}\big)\cdot\big(-\overrightarrow{AC}\big) = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$
     $= (-7){\times}(-5) + 4{\times}1 = 35 + 4 = 39$
3. Le calcul de distance permette d'effectuer les calculs suivants :
   - $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
     $= \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
   - $AC = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
   - $BC = \sqrt{(-7)^2 + 4^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$
4. En utilisant l'autre formule donnant le produit scalaire, on obtient :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

$$-13 = \sqrt{13} \times \sqrt{26} \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{-13}{\sqrt{13} \times \sqrt{26}}$$

$$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{13} \times \sqrt{26}}\right)$$

$$\widehat{BAC} \approx 135^o$$

- $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos \widehat{ABC}$

$$26 = \sqrt{13} \times \sqrt{65} \times \cos \widehat{ABC}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{26}{\sqrt{13} \times \sqrt{65}}$$

$$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{26}{\sqrt{13} \times \sqrt{65}}\right)$$

$$\widehat{ABC} \approx 26{,}565^o$$

$$\widehat{ABC} \approx 27^o$$

- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = BC \times AC \times \cos \widehat{BCA}$

$$39 = \sqrt{65} \times \sqrt{26} \times \cos \widehat{BCA}$$

$$\cos \widehat{BCA} = \frac{39}{\sqrt{65} \times \sqrt{26}}$$

$$\widehat{BCA} = \cos^{-1}\left(\frac{39}{\sqrt{65} \times \sqrt{26}}\right)$$

$$\widehat{ABC} \approx 18{,}435^o$$

$$\widehat{ABC} \approx 18^o$$

Remarque : la mesure du dernier angle aurait pû être déduite de la supplémentarité des angles.

Exercice 7

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.

Déterminer une mesure de l'angle orienté $\widehat{EDF}$ où $D(3\,;5)$, $E(-1\,;0)$, $F(2\,;4)$ au centième de degré près.

Correction 7

Une video est accessible

Le calcul des coordonnées des vecteurs donnent :

$$\overrightarrow{DE}(-4\,;-5) \quad ; \quad \overrightarrow{DF}(-1\,;-1)$$

Ainsi, le produit scalaire $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$ a pour valeur :

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = (-4) \times (-1) + (-5) \times (-1) = 9$$

La calcul des normes de vecteurs donne :

- $\|\overrightarrow{DE}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$
- $\|\overrightarrow{DF}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Le produit scalaire de deux vecteurs est également déterminé par la formule suivante :

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = DE \times DF \times \cos \widehat{EDF}$$

$$9 = \sqrt{41} \times \sqrt{2} \times \cos \widehat{EDF}$$

$$\cos \widehat{EDF} = \frac{9}{\sqrt{41} \times \sqrt{2}}$$

Les fonctions trigonométriques inverses permettent d'écrire :

$$\widehat{EDF} = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{41} \times \sqrt{2}}\right) \approx 6{,}34^o$$

au centième de degré près.

Un dessin à la main permet de montrer que l'angle $\widehat{FDE}$ est orienté positivement. Ainsi, on a :

$$\widehat{FDE} = 6{,}34^o$$

