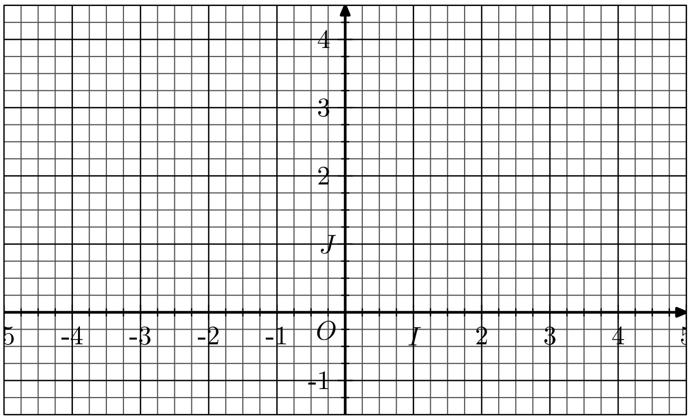
Equations cartésiennes de droites

Exercice 1

On considère le plan munit d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé.

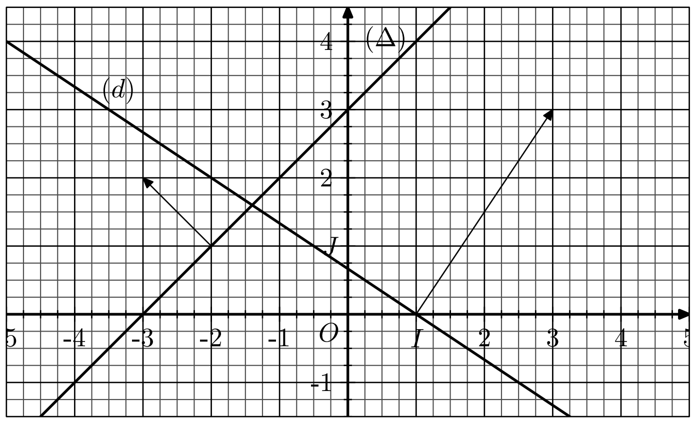
1. Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne passant par le point A et admettant le vecteur $\overrightarrow{u}$ pour vecteur normal :
   a. $\overrightarrow{u}=(2\,;3)$ et $A(1\,;0)$
   b. $\overrightarrow{u}=(-1\,;1)$ et $A(-2\,;1)$
2. Tracer la représentation de chacune de ces droites dans le repère ci-dessous ainsi qu'un représentant de chaque vecteur $\overrightarrow{u}$ au point A correspondant :



Correction 1

1. a. La droite (d) admet le vecteur $\overrightarrow{u}(2\,;3)$ pour vecteur directeur. Son équation cartésienne est de la forme :
   $$2x+3y+b=0 \qquad \text{où } b\in\mathbb{R}$$
   Le point A appartient à la droite (d) :
   $$2{\times}1+3{\times}0+b=0$$
   $$2+b=0$$
   $$b=-2$$
   La droite (d) admet l'équation cartésienne :
   $2x+3y-2=0$

   b. La droite (Δ) admet le vecteur $\overrightarrow{u}(-1\,;1)$ pour vecteur directeur. Son équation cartésienne est de la forme :
   $$-x+y+b=0 \qquad \text{où } b\in\mathbb{R}$$
   Le point A appartient à la droite (Δ) :
   $$-(-2)+1+b=0$$
   $$2+1+b=0$$
   $$3+b=0$$
   $$b=-3$$
   La droite (Δ) admet l'équation cartésienne :
   $-x+y-3=0$
2. Voici la représentation de ces deux droites :



Exercice 2

On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé :

1. On considère les deux droites (d_1) et (d_2) admettant pour équation cartésienne :
   (d_1) : $x+2{\cdot}y-1=0$; (d_2) : $4{\cdot}x+8{\cdot}y+2=0$
   Justifier que les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
2. On considère les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) admettant pour équation cartésienne :
   (Δ_1) : $4{\cdot}x+3{\cdot}y-1=0$; (Δ_2) : $-6{\cdot}x+8{\cdot}y+5=0$
   Justifier que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.

Correction 2

1. Les deux droites (d_1) et (d_2) admettent pour vecteurs normaux respectivement $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dont les coordonnées sont : $\overrightarrow{u}(1\,;2)$; $\overrightarrow{v}(4\,;8)$
   Le déterminant du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le vecteur $\overrightarrow{v}$ a pour valeur :
   $x{\cdot}y'-x'{\cdot}y=1{\times}8-4{\times}2=8-8=0$
   Le critère de colinéarité permet d'affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires : les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
2. Les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) admettent pour vecteurs normaux respectivement $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dont les coordonnées sont : $\overrightarrow{u}(4\,;3)$; $\overrightarrow{v}(-6\,;8)$
   Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ a pour valeur :
   $x{\cdot}x'+y{\cdot}y'=4{\times}(-6)+3{\times}8=-24+24=0$
   On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux : les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on considère la droite (d) *(resp.* (d')*)* passe par le point $A(-2\,;1)$ *(resp.* $B(3\,;2)$*)* et admet le vecteur $\overrightarrow{u}(3\,;-1)$ *(resp.* $\overrightarrow{v}(1\,;1)$*)* pour vecteur normal.

1. Déterminer les équations cartésiennes des droites (d) et (d').
2. a. Justifier que les droites (d) et (d') sont sécantes.

(b.) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (d').

Correction 3

1. - Le vecteur $\vec{u}(3\,;-1)$ est un vecteur normal à la droite (d).

   La droite (d) admet pour équation cartésienne :
   $3{\cdot}x - y + c = 0 \quad \text{où } c\in\mathbb{R}$

   Le point A appartenant à la droite (d), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de la droite (d) :
   $$\begin{aligned} 3{\cdot}x_A - y_A + c &= 0\\ 3\times(-2) - 1 + c &= 0\\ -6 - 1 + c &= 0\\ -7 + c &= 0\\ c &= 7 \end{aligned}$$
   La droite (d) a pour équation cartésienne :
   $(d) :\ 3{\cdot}x - y + 7 = 0$

 - Le vecteur $\vec{v}(1\,;1)$ est un vecteur normal à la droite (d').

   La droite (d') admet pour équation cartésienne :
   $x + y + c = 0 \quad \text{où } c\in\mathbb{R}$

   Le point B appartenant à la droite (d'), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de la droite (d') :
   $$\begin{aligned} x_B + y_B + c &= 0\\ 3 + 2 + c &= 0\\ 5 + c &= 0\\ c &= -5 \end{aligned}$$
   La droite (d') a pour équation cartésienne :
   $(d') :\ x + y - 5 = 0$

2. (a.) Déterminons le déterminant du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$:
   $x{\cdot}y' - x'{\cdot}y = -2\times2 - 3\times1 = -4 - 3 = -7$

   Le critère de colinéarité montre que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles.

   (b.) Le point d'intersection des droites (d) et (d') a ses coordonnées qui sont solutions du système d'équations :
   $$\begin{cases} 3{\cdot}x - y + 7 = 0\\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$$
   $$\Longrightarrow \begin{cases} 3{\cdot}x - y + 7 = 0\\ 3{\cdot}x + 3{\cdot}y - 15 = 0 \end{cases}$$
   Membre à membre, par soustraction des deux équations, on obtient :
   $$\begin{aligned} -y - 3{\cdot}y + 7 - (-15) &= 0\\ -4{\cdot}y + 22 &= 0\\ -4{\cdot}y &= -22\\ y &= \frac{22}{4}\\ y &= \frac{11}{2} \end{aligned}$$
   Utilisons la seconde équation :
   $$\begin{aligned} x + y - 5 &= 0\\ x + \frac{11}{2} - 5 &= 0\\ x + \frac{11}{2} - \frac{10}{2} &= 0\\ x + \frac{1}{2} &= 0\\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$
   Ainsi, le point d'intersection a pour coordonnées :
   $M\Big(-\frac{1}{2}\,;\frac{11}{2}\Big)$

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère les points $A(-1\,;1)$, $B(3{,}5\,;-2)$, $M(4\,;2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Montrer que le point $H(2\,;-1)$ est le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB).

Correction 4

1. - Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A) &= (3{,}5 - (-1)\,;\,-2-1)\\ &= (3{,}5+1\,;\,-3) = (4{,}5\,;\,-3) \end{aligned}$$
 - On en déduit que le vecteur $\vec{u}(3\,;4{,}5)$ est un vecteur normal à la droite (AB) :
   $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 4{,}5\times3 + (-3)\times4{,}5 = 13{,}5 - 13{,}5 = 0$
 - La droite (AB) admet pour équation cartésienne :
   $3{\cdot}x + 4{,}5{\cdot}y + c = 0 \quad c\in\mathbb{R}$

   Le point A appartenant à la droite (AB), ses coordonnées vérifient cette équation cartésienne :
   $$\begin{aligned} 3{\cdot}x_A + 4{,}5{\cdot}y_A + c &= 0\\ 3\times(-1) + 4{,}5\times1 + c &= 0\\ -3 + 4{,}5 + c &= 0\\ 1{,}5 + c &= 0\\ c &= -1{,}5 \end{aligned}$$
   La droite (AB) admet pour équation cartésienne :
   $3{\cdot}x + 4{,}5{\cdot}y - 1{,}5 = 0$

2. - Montrons que le point H appartient à la droite (AB) :
   $$\begin{aligned} 3{\cdot}x_H + 4{,}5{\cdot}y_H - 1{,}5 &= 3\times2 + 4{,}5\times(-1) - 1{,}5\\ &= 6 - 4{,}5 - 1{,}5 = 0 \end{aligned}$$
 - Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MH}$:
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{MH}(x_H - x_M\,;y_H - y_M) &= (2-4\,;\,-1-2)\\ &= (-2\,;\,-3) \end{aligned}$$
 - Montrons que la droite (MH) est perpendiculaire à la droite (AB). Pour cela, montrons que les deux vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux :
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AB} &= 4{,}5\times(-2) + (-3)\times(-3)\\ &= -9 + 9 = 0 \end{aligned}$$

   Le point H est le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB).

