Suite arithmétique

Exercice 1

1. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n) arithmétique de premier terme 2 et de raison 3.

2. Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n) arithmétique de premier terme 3 et de raison $-\frac{3}{2}$.

Correction 1

1. La suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 3 est définie par les deux relations :
$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 3 \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = 2$
- $u_1 = u_0 + r = 2 + 3 = 5$
- $u_2 = u_1 + r = 5 + 3 = 8$
- $u_3 = u_2 + r = 8 + 3 = 11$
- $u_4 = u_3 + r = 11 + 3 = 14$

2. La suite arithmétique (v_n) de premier terme 3 et de raison $-\frac{3}{2}$ est définie par les deux relations :
$v_0 = 3 \quad ; \quad v_{n+1} = v_n - \frac{3}{2} \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Voici les cinq premiers termes de la suite (v_n) :

- $v_0 = 3$
- $v_1 = v_0 + r = 3 - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$
- $v_2 = v_1 + r = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$
- $v_3 = v_2 + r = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$
- $v_4 = v_3 + r = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{6}{2} = -3$

Exercice 2

On considère les deux suites de nombres ci-dessous dont on donne les sept premiers termes :

a. 3 ; 5 ; 7 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16

b. 6 ; 3,5 ; 1 ; -1,5 ; -4 ; -6,5 ; -9

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite arithmétique?
Si oui, donner le premier terme et la raison. Si non, justifier votre rejet de cette affirmation.

Correction 2

a. Notons (u_n) cette suite de nombres.
On a : $u_1 = 5 \quad ; \quad u_2 = 7 \quad ; \quad u_3 = 10$

On remarque les relations :
$u_2 = u_1 + 2 \quad ; \quad u_3 = u_2 + 3$

On ne passe pas d'un terme à l'autre en additionnant le même nombre : la suite (u_n) n'est pas une suites arithmétique.

b. On remarque que pour passer d'un terme à l'autre, on ajoute toujours $-2,5$: les premiers termes permettent de conjecturer que cette suite est une suite arithmétique de raison $-2,5$.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{(n+2)\cdot u_n + 1}{n+1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. Conjecturer la nature de la suite (u_n) en justifiant votre démarche.

Correction 3

1. Voici les quatre premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = 1$
- $u_1 = \frac{(0+2)\cdot u_0 + 1}{0+1} = \frac{2\times 1 + 1}{1} = \frac{3}{1} = 3$
- $u_2 = \frac{(1+2)\cdot u_1 + 1}{1+1} = \frac{3\times 3 + 1}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- $u_3 = \frac{(2+2)\cdot u_2 + 1}{2+1} = \frac{4\times 5 + 1}{3} = \frac{21}{3} = 7$

2. On peut conjecturer que la suite (u_n) est une suite arithmétique car la différence de deux termes consécutifs de la suite est contante égale à 2 :
$u_1 - u_0 = 2 \quad ; \quad u_2 - u_1 = 2 \quad ; \quad u_3 - u_2 = 2$

Exercice 4

On considère les deux suites de nombres ci-dessous dont on donne les sept premiers termes :

a. 3 ; 5 ; 7 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16

b. 6 ; 3,5 ; 1 ; -1,5 ; -4 ; -6,5 ; -9

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite arithmétique?
Si oui, donner le premier terme et la raison. Si non, justifier votre rejet de cette affirmation.

Correction 4

a. Notons (u_n) cette suite de nombres.
On a : $u_1 = 5 \quad ; \quad u_2 = 7 \quad ; \quad u_3 = 10$

On remarque les relations :
$u_2 = u_1 + 2 \quad ; \quad u_3 = u_2 + 3$

On ne passe pas d'un terme à l'autre en additionnant le même nombre : la suite (u_n) n'est pas une suites arithmétique.

b. On remarque que pour passer d'un terme à l'autre, on ajoute toujours $-2,5$: les premiers termes permettent de conjecturer que cette suite est une suite arithmétique de raison $-2,5$.

Exercice 5*

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $u_0=5$ et de raison 3. Déterminer les six premiers termes de cette suite.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

   a. Pour passer du terme v_7 au terme v_{15}, combien de fois ajoute-t-on la raison?

   b. On donne les valeurs suivantes de termes :
   $v_7 = 13 \quad ; \quad v_{15} = 39$
   Déterminer la valeur du premier terme et de la raison de la suite.

3. Dans chaque cas ci-dessous, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, déterminer la valeur de son premier terme et de sa raison :

   a. $w_0 = 5$; $w_9 = 25$
   b. $w_6 = 7$; $w_8 = 1$
   c. $w_{15} = 54$; $w_{99} = 180$

Correction 5

1.
- $u_0 = 5$
- $u_1 = u_0 + 3 = 8$
- $u_2 = u_1 + 3 = 11$
- $u_3 = u_2 + 3 = 14$
- $u_4 = u_3 + 3 = 17$
- $u_5 = u_4 + 3 = 20$

2. a. Il faut ajouter 8 fois la raison pour passer du terme de rang 7 au terme de rang 15.

   b. Ainsi, on a :

$$u_{15} = u_7 + 8\times r$$
$$u_{15} - u_7 = 8\cdot r$$
$$r = \frac{u_{15}-u_7}{8}$$
$$r = \frac{39-13}{8}$$
$$r = \frac{26}{8}$$
$$r = \frac{13}{4}$$

3. a. Puisque (w_n) est une suite arithmétique, on a :

$$w_9 = w_0 + 9\times r$$
$$w_9 - w_0 = 9\cdot r$$
$$25 - 5 = 9\cdot r$$
$$r = \frac{20}{9}$$

Ainsi, la suite (w_n) est la suite arithmétique de premier terme 5 et de raison $\frac{20}{9}$.

   b. Puisque (w_n) est une suite arithmétique, on a :

$$w_8 = w_6 + 2\times r$$
$$w_8 - w_6 = 2\cdot r$$
$$1 - 7 = 2\cdot r$$
$$r = \frac{-6}{2} = -3$$

On a la relation :

$$w_6 = w_0 + 6\times r$$
$$7 = w_0 + 6\times(-3)$$
$$7 = w_0 - 18$$
$$w_0 = 7 + 18$$
$$w_0 = 25$$

On en déduit que la suite (w_n) est un suite arithmétique de premier terme 25 et de raison -3.

   c. Puisque (w_n) est une suite arithmétique, on a :

$$w_{99} = w_{15} + 84\times r$$
$$w_{99} - w_{15} = 84\cdot r$$
$$180 - 54 = 84\cdot r$$
$$r = \frac{126}{84} = \frac{3}{2}$$

On a la relation :

$$w_{15} = w_0 + 15\times r$$
$$54 = w_0 + 15\times\frac{3}{2}$$
$$54 = w_0 + \frac{45}{2}$$
$$w_0 = 54 - \frac{45}{2}$$
$$w_0 = \frac{108-45}{2}$$
$$w_0 = \frac{63}{2}$$

Ainsi, la suite (w_n) est la suite arithmétique de premier terme $\frac{63}{2}$ et de raison $\frac{3}{2}$.

