Suite géométrique

Exercice 1

1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n) géométrique de premier terme 2 et de raison 3.

2. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (v_n) géométrique de premier terme 3 et de raison $-\dfrac{3}{2}$.

Correction 1

1. La suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3, elle est définie par les relations :
$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = 3\cdot u_n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Voici les quatre premiers termes de la suite (u_n) :
- $u_0 = 2$
- $u_1 = u_0\times q = 2\times 3 = 6$
- $u_2 = u_1\times q = 6\times 3 = 18$
- $u_3 = u_2\times q = 18\times 3 = 54$

2. La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme 3 et de raison $-\dfrac{3}{2}$, elle est définie par les relations :
$v_0 = 3 \quad ; \quad v_{n+1} = -\dfrac{3}{2}\cdot v_n \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Voici les quatre premiers termes de la suite (v_n) :
- $v_0 = 3$
- $v_1 = q\times v_0 = -\dfrac{3}{2}\times 3 = -\dfrac{9}{2}$
- $v_2 = q\times v_1 = -\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{27}{4}$
- $v_3 = q\times v_2 = -\dfrac{3}{2}\times\dfrac{27}{4} = -\dfrac{81}{8}$

Exercice 2

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q. Compléter les expressions suivantes :

a. $u_7 = u_3\times q^{\cdots}$ b. $u_{25} = u_{11}\times q^{\cdots}$

c. $u_3 = u_8\times q^{\cdots}$ d. $u_{15} = u_{23}\times q^{\cdots}$

Correction 2

a. $u_7 = u_3\times q^4$ b. $u_{25} = u_{11}\times q^{14}$

c. $u_3 = u_8\times q^{-5}$ d. $u_{15} = u_{23}\times q^{-8}$

Exercice 3

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{3}{8}$ et de raison 2. Déterminer les six premiers termes de cette suite.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

 a. Pour passer du terme v_{11} au terme v_{14}, par combien de fois multiplie-t-on par la raison?

 b. A partir des valeurs des deux termes suivants :
 $v_{11} = \dfrac{4}{7} \quad ; \quad v_{14} = \dfrac{27}{14}$
 Déterminer la valeur du premier terme et de la raison de la suite (v_n).

3. Dans chacun des cas ci-dessous, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, déterminer son premier terme et sa raison :

 a. $w_0 = 5$; $w_3 = 40$ b. $w_3 = \dfrac{3}{8}$; $w_6 = -\dfrac{3}{64}$

 c. $w_{124} = 2\times 10^{-4}$; $w_{128} = \dfrac{1}{8}$

Correction 3

1.
- $u_0 = \dfrac{3}{8}$
- $u_1 = 2\cdot u_0 = \dfrac{3}{4}$
- $u_2 = 2\cdot u_1 = \dfrac{3}{2}$
- $u_3 = 2\cdot u_2 = 3$
- $u_4 = 2\cdot u_3 = 6$
- $u_5 = 2\cdot u_4 = 12$

2. a. Pour passer de u_{11} à u_{14}, il faut multiplier 3 fois par la raison.

 b. Ainsi, on peut écrire :

$$v_{14} = v_{11}\times q^3 \qquad \dfrac{27}{14} = \dfrac{4}{7}\cdot q^3 \qquad q^3 = \dfrac{\dfrac{27}{14}}{\dfrac{4}{7}} \qquad q^3 = \dfrac{27}{14}\times\dfrac{7}{4}$$

$$q^3 = \dfrac{27}{8} \qquad q^3 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 \qquad q = \dfrac{3}{2}$$

 Partons du terme de rang 11 pour déterminer le premier terme :

$$v_{11} = v_0\times q^{11} \qquad \dfrac{4}{7} = v_0\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{11} \qquad \dfrac{4}{7} = v_0\times\dfrac{3^{11}}{2^{11}}$$

$$v_0 = \dfrac{4}{7}\times\dfrac{2^{11}}{3^{11}} \qquad v_0 = \dfrac{2^2\times 2^{11}}{7\times 3^{11}} \qquad v_0 = \dfrac{2^{13}}{7\times 3^{11}}$$

3. a. Pour passer du terme de w_3 au terme w_0, il faut multiplier par q^3, on a :

$$w_3 = w_0\times q^3 \qquad 40 = 5\times q^3 \qquad q^3 = 8 \qquad q^3 = 2^3 \qquad q = 2$$

 La raison de cette suite est 2.

 b. On a l'égalité suivante :

 BY-NC

$$w_6 = w_3 \times q^3$$
$$-\frac{3}{64} = \frac{3}{8} \times q^3$$
$$q^3 = \frac{-\frac{3}{64}}{\frac{3}{8}}$$
$$q^3 = -\frac{3}{64} \times \frac{8}{3}$$

$$q^3 = -\frac{1}{8}$$
$$q^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$
$$q = -\frac{1}{2}$$

La raison de cette suite est $-\frac{1}{2}$.

c. On a l'égalité suivante :

$$w_{128} = w_{124} \times q^4$$
$$\frac{1}{8} = 2\times10^{-4} \times q^4$$
$$\frac{\frac{1}{8}}{2\times10^{-4}} = q^4$$
$$q^4 = \frac{\frac{1}{8}}{2\times10^{-4}}$$

$$q^4 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2\times10^{-4}}$$
$$q^4 = \frac{10^4}{16}$$
$$q^4 = 625$$
$$q^4 = 5^4$$

La raison peut avoir deux valeurs :
-5 et 5

Exercice 4

On considère les deux suites de nombres ci-dessous où sont donnés les six premiers termes :

a. $8 \quad ; \quad 4 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{1}{4}$

b. $1 \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 9 \quad ; \quad 18 \quad ; \quad 54 \quad ; \quad 162$

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite géométrique?
Si oui, préciser le premier terme et la raison. Sinon, justifier votre rejet de la conjecture.

Correction 4

a. On remarque que pour passer d'un terme à l'autre, on multiplie par $\frac{1}{2}$. Cela permet de conjecturer que cette suite est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Notons (u_n) cette suite de nombre. On a :
$u_1 = 3 \quad ; \quad u_2 = 9 \quad ; \quad u_3 = 18$

Or, on a les relations suivantes :
$u_2 = 3 \times u_1 \quad ; \quad u_3 = 2 \times u_2$
On en déduit qu'il n'existe pas un seul facteur permettant de passer d'un terme au suivant : la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = 9 \times 2^n - u_n$

1. Déterminer la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. Conjecturer la nature de la suite (u_n) en justifiant votre démarche.

Correction 5

1. Voici les quatres premiers termes de la suite (u_n) :
- $u_0 = 3$
- $u_1 = 9\times2^0 - u_0 = 9\times1 - 3 = 6$
- $u_2 = 9\times2^1 - u_1 = 9\times2 - 6 = 12$
- $u_3 = 9\times2^2 - u_2 = 9\times4 - 12 = 36 - 12 = 24$

2. On peut conjecturer que la suite (v_n) est une suite géométrique car le rapport de deux termes consécutifs de cette suite est constante égale à 2 :
$\frac{v_1}{v_0} = 2 \quad ; \quad \frac{v_2}{v_1} = 2 \quad ; \quad \frac{v_3}{v_2} = 2$

BY-NC