Warm up spécialité année 2019-2020

Warm up spécialité 2019-2020.

Créer un tableau de signes.

Créer le tableau de signes de l'expression $4x-1$.

Créer le tableau de signes de l'expression $-2x+1$.

En déduire le tableau de signes de l'expression $(4x-1)(-2x+1)$

Développement, factorisation, équation, inéquation.

On considère les expressions suivantes :

$f(x)=(2x-1)(x+3)-(2x-1)^2$ et $g(x)=(2x+1)^2-(x+4)^2$

Développer et factoriser $f(x)$ et $g(x)$.

Quelle forme utilise-t-on pour résoudre $f(x)=0, f(x)=-4$ et $f(x)>0$? Résoudre.

Solutions :

On résout l'équation $4x-1=0$ $\quad 4x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

X	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$4x-1$		-	0	+	

On résout l'équation $-2x+1=0$ $\quad -2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

X	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x+1$		+	0	-	

Tableau de signes du produit :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x-1$		-	0	+		+	
$-2x+1$		+		+	0	-	
$(4x-1)(-2x+1)$		-	0	+	0	-	

$f(x)=(2x-1)(x+3)-(2x-1)^2$ et $g(x)=(2x+1)^2-(x+4)^2$

Factorisation.

$$f(x)=(2x-1)(x+3)-(2x-1)^2=(2x-1)(x+3)-(2x-1)(2x-1)=(2x-1)\big((x+3)-(2x-1)\big)$$

$$f(x)=(2x-1)(x+3-2x+1)=(2x-1)(-x+4)$$

$$g(x)=(2x+1)^2-(x+4)^2=\big((2x+1)-(x+4)\big)\big((2x+1)+(x+4)\big)=(2x+1-x-4)(2x+1+x+4)$$

$$g(x)=(x-3)(3x+5)$$

Développement.

$f(x)=(2x-1)(x+3)-(2x-1)^2=2x^2-x+6x-3-(4x^2-4x+1)=2x^2+5x-3-4x^2+4x-1=$
$-2x^2+9x-4$

$$g(x)=(2x+1)^2-(x+4)^2=4x^2+4x+1-(x^2+8x+16)=3x^2-4x-15$$

Pour résoudre $f(x)=0$ on prend la forme factorisée.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (2x-1)(-x+4) \Leftrightarrow 2x-1=0 \quad ou \quad -x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \quad ou \quad x=4$$

Pour résoudre $f(x)=-4$ on prend la forme développée.

$$f(x)=-4 \Leftrightarrow -2x^2+9x-4=-4 \Leftrightarrow -2x^2+9x=0 \Leftrightarrow x(-2x+9)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad ou -2x+9=0 \Leftrightarrow x$$
$$=0 \quad ou \quad x=\frac{9}{2}$$

Pour résoudre $f(x)>0$ on prend la forme factorisée et on fait un tableau de signes.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$2x-1$		-	0	+		+	
$-x+4$		+		+	0	-	
$(2x-1)(-x+4)$		-	0	+	0	-	

$$(2x-1)(-x+4) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2}; 4\right[$$

Formes factorisée, développée et canonique.

On considère le polynôme $p(x) = x^2 - 2x - 3$

Ce polynôme peut s'écrire également $p(x) = (x-3)(x+1)$ ou $p(x) = (x-1)^2 - 4$

1) Résoudre $p(x) = 0$
2) Résoudre $p(x) = -3$
3) Résoudre $p(x) = 5$
4) Donner les coordonnées du sommet de cette parabole.
5) Vérifier que les trois formes sont bien des formes de $p(x)$ (question bonus)

Solutions

$p(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \quad ou \quad x + 1 = 0 \qquad S = \{-1; 3\}$

$p(x) = -3 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} - 3 = -3 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x - 2 = 0 \qquad S = \{0; 2\}$

$p(x) = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 1 = -3 \quad ou \quad x - 1 = 3 \qquad S = \{-2; 4\}$

On utilise au choix la forme canonique ou la formule du cours : $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{2a}}$

On trouve $S(1\,; -4)$

Trouver une forme canonique.

Donner la forme canonique des trinômes suivants :

$f(x) = x^2 + 5x + 2$ $\quad g(x) = 4x^2 + 4x + 2$ et $\quad h(x) = 3x^2 - 4x + 2$

Indiquer si les trinômes possèdent un maximum ou un minimum.

Résoudre une équation du second degré, discriminant.

Résoudre les équations suivantes :

$x^2 + 2x - 3 = 0$ $\qquad 4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\qquad 2x^2 + 2x + 1 = 0$

Solutions.

$f(x) = x^2 + 5x + 2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{8}{4} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$

$g(x) = 4x^2 + 4x + 2 = (2x + 1)^2 - 1 + 2 = (2x + 1)^2 + 1$

$$h(x) = 3x^2 - 4x + 2 = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right) = 3\left(\left(x - \frac{4}{6}\right)^2 - \frac{16}{36} + \frac{2}{3}\right) = 3\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + \frac{6}{9}\right) = 3\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right)$$

$$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

$f(x)$ possède un minimum $-\frac{17}{4}$ atteint pour $x = -\frac{5}{2}$

$g(x)$ possède un minimum 1 atteint pour $x = -\frac{1}{2}$

$h(x)$ possède un minimum $\frac{2}{3}$ atteint pour $x = \frac{2}{3}$

Solutions.

$x^2 + 2x - 3 = 0$ $\qquad$ a=1 b=2 et c=-3 $\qquad \Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16$

$\Delta > 0$ Il y a donc deux solutions réelles $\quad x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = \frac{-2-4}{2} = -3$

$4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\qquad$ a=4 b=-4 et c=-1 $\qquad \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$ $\quad \Delta = 0$ Il y a donc une solution réelle $\quad x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$2x^2 + 2x + 1 = 0$ a=4 b=-4 et c=-1 $\qquad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4$ $\quad \Delta < 0$ Il n'y a pas de solution réelle

Tableau de signe d'un trinôme du second degré.

Faire le tableau de signe de la fonction : $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Solutions

$f(x) = x^2 - 5x + 4$

a=1 b=-5 et c=4

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9$ $\Delta > 0$ Il y a donc deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{9}}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{9}}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$

x	-∞		1		4		+∞
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Donner la forme canonique d'une expression.
Trouver une forme canonique.

Donner la forme canonique de la fonction $h(x) = x^2 - 4x + 2$

Indiquer si la fonction possède un maximum ou un minimum.

Solutions.

$h(x) = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 4 + 2 = (x-2)^2 - 2$

$h(x)$ possède un minimum -2 atteint pour $x = 2$

Equations du second degré.

Résoudre l'équation suivante : $x^2 + 4x - 1 = x - 5$

La parabole d'équation $y = x^2 + 4x - 1$ et la droite d'équation $y = x - 5$ possèdent-elles des points d'intersection ?

Calculs avec des racines carrées.

Rappels : $\sqrt{A \times B} = \sqrt{A} \times \sqrt{B}$ $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ et $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{49} = 7$

Simplifier les racines carrées suivantes :

$\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{72}$, $\sqrt{200}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{98}$, $\sqrt{8}$,

$$4\sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{18}$$

Solutions.

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$, $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$, $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$, $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

$$4\sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{18} = 4\sqrt{25 \times 2} + \sqrt{4 \times 2} - \sqrt{9 \times 2} = 20\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 19\sqrt{2}$$

$$x^2 + 4x - 1 = x - 5 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 4 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7$ $\Delta < 0$ Il n'y a pas de solution réelle

Il n'y a donc pas de point d'intersection entre la droite et la parabole.

Tableau de signe d'un trinôme du second degré.

Faire le tableau de signe de la fonction : $f(x) = x^2 - \sqrt{5}x + 4$

Positions relatives de courbes

On donne $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$ et $g(x) = -x^2 + x - 1$

Faire un tableau des positions relatives des courbes représentatives de f et de g.

$f(x) = x^2 - \sqrt{5}x + 4$

a=1 b=-$\sqrt{5}$ et c=4

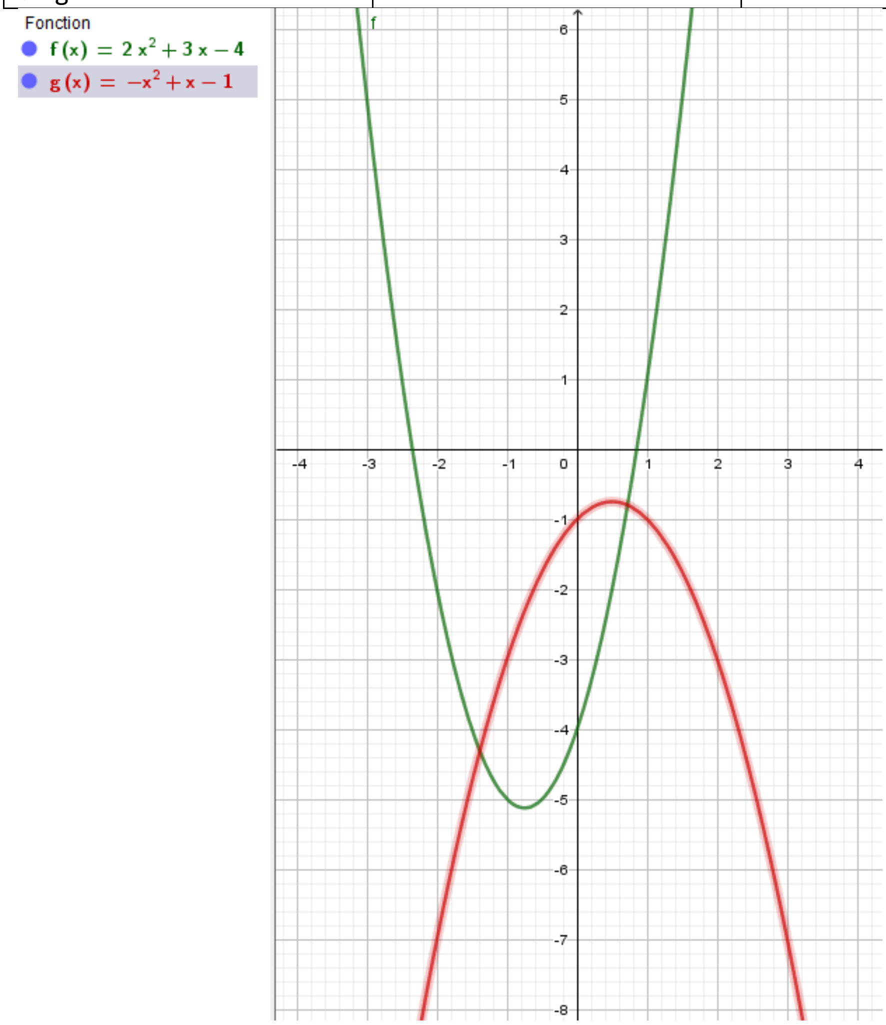
$\Delta = b^2 - 4ac = 5 - 16 = -11$ $\Delta < 0$ Il y n'a pas de racine. $f(x)$ est donc du signe de a=1.

x	-∞ +∞
$f(x)$	+

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + 3x - 4 - (-x^2 + x - 1) = 3x^2 + 2x - 3$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times (-3) = 4 + 36 = 40$ $\Delta > 0$ Il y a donc deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{40}}{6} = \frac{-2+2\sqrt{10}}{6} = \frac{-1+\sqrt{10}}{3}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{40}}{6} = \frac{-2-2\sqrt{10}}{6} = \frac{-1-\sqrt{10}}{3}$

x	-∞	x_2		x_1	+∞
$f(x) - g(x)$	+	0	-	0	+
Positions de Cf par rapport à Cg	Cf au dessus de Cg		Cf en dessous de Cg		Cf au dessus de Cg



Solutions :

Il peut y avoir des valeurs interdites : $x^2 - 2x + 1 \neq 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$ $\Delta = 0$. Il y a une racine : $\frac{2}{2} = 1$. 1 est donc une valeur interdite.

L'ensemble de définition est $\mathbb{R} - \{1\}$

On étudie le signe de $x^2 + x + 1$ et le signe de $x^2 - 2x + 1$

Signe de $x^2 + x + 1$. $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$. Il n'y a pas de racine. $x^2 + x + 1 > 0$

Signe de $x^2 - 2x + 1$. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ Il y a une racine : $\frac{2}{2} = 1$. $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

On résume dans un tableau :

x	-∞	1	+∞
$x^2 + x + 1$	+	|	+
$x^2 - 2x + 1$	+	0	+
$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 1}$	+	||	+

$S = \mathbb{R} - \{1\}$

Simplifier des racines carrées

$$3\sqrt{27} + 2\sqrt{12} - \sqrt{300}$$

$$4\sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{18}$$

Réduire au même dénominateur et simplifier.

$$\frac{2}{x+1} - \frac{1}{3} \ \ pour \ \ x \neq -1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{3} \ \ pour \ x \neq 0$$

Manipulation de formules

$F = \frac{Gm_a m_b}{d^2}$ Première Loi de Newton (seconde)

Exprimer m_b en fonction des autres variables. Exprimer d en fonction des autres variables.

Solutions :

$$3\sqrt{27}+2\sqrt{12}-\sqrt{300}=3\times3\sqrt{3}+2\times2\sqrt{3}-10\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{18}=4\sqrt{25\times2}+\sqrt{4\times2}-\sqrt{9\times2}=20\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=19\sqrt{2}$$

$$\frac{2}{x+1}-\frac{1}{3}=\frac{2\times3}{(x+1)\times3}-\frac{1\times(x+1)}{3\times(x+1)}=\frac{6}{(x+1)\times3}-\frac{(x+1)}{3\times(x+1)}=\frac{6-x-1}{3(x+1)}=\frac{5-x}{3(x+1)}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{x+1}{3}=\frac{3}{3x}+\frac{x(x+1)}{3x}=\frac{3+x^2+x}{3x}\quad pour\ x\neq0$$

$m_b=\frac{F\,d^2}{Gm_a}$ $\qquad d=\sqrt{\frac{Gm_am_b}{F}}$

Somme et produit de racines d'un polynôme.

On considère le polynôme $p(x) = 2x^2 - 5x + 2$

1) Chercher une racine évidente x_1. Rappel : $p(x_1) = 0$
2) En utilisant le cours
   ($p(x) = ax^2 + bx + c$. La somme des racines vaut $-\frac{b}{a}$ et le produit vaut $\frac{c}{a}$),
   trouver la deuxième racine x_2

Résoudre une inéquation.

Résoudre l'inéquation $\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1} > 0$

Solutions :

Les racines sont $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

Il peut y avoir des valeurs interdites : $x^2 - 2x + 1 \neq 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$ $\Delta = 0$. Il y a une racine : $\frac{2}{2} = 1$. 1 est donc une valeur interdite.

L'ensemble de définition est $\mathbb{R} - \{1\}$

On étudie le signe de $x^2 + x + 1$ et le signe de $x^2 - 2x + 1$

Signe de $x^2 + x + 1$. $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$. Il n'y a pas de racine. $x^2 + x + 1 > 0$

Signe de $x^2 - 2x + 1$. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ Il y a une racine : $\frac{2}{2} = 1$. $x^2 - 2x + 1 \geq 0$

On résume dans un tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x^2 + x + 1$		+	|	+	
$x^2 - 2x + 1$		+	0	+	
$\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1}$		+	||	+	

$S = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\boldsymbol{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 1} > 0}$$

Algorithme de seuil.

Une balle part d'une hauteur de 2,5 m et perd 15% de sa hauteur à chaque rebond. On cherche le nombre de rebonds pour qu'elle perde la moitié de sa hauteur. Pour résoudre le problème, on considère l'algorithme suivant :

Lire h
$0 \rightarrow n$
Tant que $h > 1{,}25$
    $n + 1 \rightarrow n$
    $h * 0{,}85 \rightarrow h$
Fin tant que
Afficher n

Remplir le tableau d'exécution suivant :

	Initialisation					
n	0					
h	2,5					

Suite numérique et algorithme.

On considère la suite définie par $\begin{cases} U_{n+1} = -U_n + 2 \\ U_0 = 4 \end{cases}$

Utiliser l'algorithme suivant pour calculer U_5

$5 \rightarrow n$
$4 \rightarrow U$
Pour i allant de 1 à n faire
    $-U + 2 \rightarrow U$
Fin du pour
Afficher U

Remplir le tableau d'exécution suivant :

	Initialisation							
n								
U								
i		1						

Solutions.

	Initialisation							
n	5	5	5	5	5	5		
U	4	-2	4	-2	4	-2		
i		1	2	3	4	5		

Solutions.

	Initialisation					
n	0	1	2	3	4	5
h	2,5	2 ,125	1,81	1,54	1,31	1,11

L'algorithme affiche 5

Monotonie d'une suite.

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par $U_n = 3n + 1$

Démontrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est monotone.

Trouver une suite (géométrique).

Traduire par une suite numérique l'évolution d'une population qui perd 4% de ses individus chaque année. La population de départ est de 10 000 individus.

Solutions :

$(U_n)_{n\geq 0}$ définie par $U_n = 3n + 1$

On calcule $U_{n+1} - U_n = 3(n+1) + 1 - (3n+1) =$
$3n + 3 + 1 - 3n - 1 = 3$

$(U_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite strictement croissante.

On peut traduire une perte de 4% par un coefficient multiplicatif de 0,96. Le problème peut se traduire par une suite (géométrique) définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = 0{,}96\ U_n \\ U_0 = 10\ 000 \end{cases}$$

Algorithme, Python.

On considère la fonction définie en Python :

```
def affine(x):
    if x<=8 :
        y=x*40+10
    else:
        y=x*60
    return(y)

print("pour x=6 : ",affine(6))
print("pour x=8 : ",affine(8))
print("pour x=10 : ",affine(10))
```

Qu'affiche le langage Python (pour les valeurs, 6, 8 et 10) ?

Travail sur une suite

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 2n - 1 \\ U_0 = 1 \end{cases}$ Calculer les 4 premiers termes de la suite. Calculer $U_{n+1} - U_n$. Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite ?

Solutions :

```
pour x=6 :  250
pour x=8 :  330
pour x=10 :  600
```

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 2n - 1 \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

$U_0 = 1$ $U_1 = 1 + 2 \times 0 - 1 = 0$ $U_2 = 0 + 2 \times 1 - 1 = 1$ $U_3 = 1 + 2 \times 2 - 1 = 4$

$U_{n+1} - U_n = 2n - 1$. Or $2n - 1 > 0 \; pou \; n > 0{,}5$.

La suite (U_n) est strictement croissante pour $n \geq 1$

Démontrer qu'une suite est arithmétique.

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par $U_n = 3n + 1$

Démontrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique, en calculant $U_{n+1} - U_n$.

Vous donnerez la raison et le premier terme U_0

Simplifier une fraction

Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{3}{1 - \frac{x+1}{x-1}} =$$

$$\frac{4^2 \times 2^3}{2^{-3}} =$$

Solutions :

$$\frac{3}{1 - \frac{x+1}{x-1}} = \frac{3}{\frac{x-1}{x-1} - \frac{x+1}{x-1}} = \frac{3}{\frac{-2}{x-1}} = -\frac{3(x-1)}{2}$$

$$\frac{4^2 \times 2^3}{2^{-3}} = \frac{2^{2^2} \times 2^3}{2^{-3}} = \frac{2^4 \times 2^3}{2^{-3}} = \frac{2^7}{2^{-3}} = 2^{10}$$

$(U_n)_{n\geq 0}$ définie par $U_n = 3n + 1$

On calcule $U_{n+1} - U_n = 3(n+1) + 1 - (3n+1) = 3n + 3 + 1 - 3n - 1 = 3$

$(U_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite arithmétique de raison 3 e de premier terme $U_0 = 3 \times 0 + 1 = 1$

Nature d'une suite.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n - 1 \\ U_0 = -3 \end{cases}$$

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} V_n = U_n - 1 \\ V_0 \end{cases}$$

Calculer U_1, U_2 , U_3 . Prouver que U_n n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Bonus : faire la même chose pour V_n. Qu'en pensez-vous ?

Suite arithmétique, suite géométrique.

Traduire par une suite géométrique V_n une diminution de 5% chaque année (n peut correspondre au nombre des années). On donne $V_0 = 200$. Ecrire la formule de récurrence et la formule explicite. Calculer V_9

Traduire par une suite arithmétique U_n une augmentation de 30€ chaque année (n peut correspondre au nombre des années). On donne $U_0 = 500$. Ecrire la formule de récurrence et la formule explicite. Calculer U_9

Solutions.

$U_1 = -7, U_2 = -15$, $U_3 = -31$

$U_2 - U_1 = -8 \neq U_3 - U_2 = -16$. U_n n'est pas arithmétique.

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-15}{-7} \neq \frac{U_3}{U_2} - = \frac{-31}{-15}$. U_n n'est pas géométrique.

$V_{n+1} = 0{,}95\, V_n$ $\quad V_n = 200 \times 0.95^n$ $\quad V_9 = 200 \times 0.95^9 \approx 126{,}05$

$U_{n+1} = U_n + 30$ $\quad U_n = 500 + 30n$ $\quad U_9 = 500 + 9 \times 30 = 770$

Prouver qu'une suite est géométrique.

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n + 2 \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} V_n = U_n + 1 \\ V_0 \end{cases}$$

Prouver que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Ecrire V_n en fonction de n. En déduire U_n en fonction de n

Solutions

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} + 1}{U_n + 1} = \frac{3U_n + 2 + 1}{U_n + 1} = \frac{3(U_n + 1)}{U_n + 1} = 3$$

$$V_n = 1 \times 3^n$$

$$u_n = 1 \times 3^n - 1$$

Résoudre une équation du second degré, discriminant.

Résoudre les équations suivantes :

$x^2 + 2x - 3 = 0$ $\quad$ $4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\quad$ $2x^2 + 2x + 1 = 0$

Algorithme.

On considère l'algorithme suivant :

$x \leftarrow 0$
$y \leftarrow -1$
If $x > y$ alors $x \leftarrow x + y$
    Sinon $y \leftarrow x - y$

Quelles sont les valeurs de x et y ? Recommencer avec $x \leftarrow -2$ et $y \leftarrow 1$

$x^2 + 2x - 3 = 0$ a=1 b=2 et c=-3 $\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16$ $\Delta > 0$ Il y a donc deux solutions réelles

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = \frac{-2-4}{2} = -3$

$4x^2 - 4x + 1 = 0$ a=4 b=-4 et c=-1 $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$ $\Delta = 0$ Il y a donc une solution réelle

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$2x^2 + 2x + 1 = 0$ a=4 b=-4 et c=-1 $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4$ $\Delta < 0$ Il n'y a pas de une solution réelle

Solutions :

x	0	-1
y	-1	-1

x	-2	-2
y	1	-3

Trouver une suite géométrique.

Traduire par une suite géométrique l'évolution d'une population qui perd 4% de ses individus chaque année. La population de départ est de 10 000 individus.

Calculer une somme.

Rappels de cours.

$$Si\ (U_n)_{n\geq 0} arithmétique\ \sum_{i=0}^{n} U_i = (n+1)\frac{U_0 + U_n}{2} = (Nbre\ termes)\frac{Premier\ terme + dernier\ terme}{2}$$

$$Si\ (U_n)_{n\geq 0} géométrique\ \sum_{i=0}^{n} U_i = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = premier\ terme \frac{1-q^{nbre\ de\ termes}}{1-q}$$

Calculer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{i=2}^{6} U_i \quad avec \quad (U_n)_{n\geq 0} géométrique\ de\ premier\ terme\ U_2 = 4\ et\ de\ raison\ (-3)$$

$$S' = 4 + 8 + 12 + \cdots \dots \dots . +24 + 28$$

Solutions.

On peut traduire une perte de 4% par un coefficient multiplicatif de 0,96. Le problème peut se traduire par une suite géométrique définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = 0{,}96\ U_n \\ U_0 = 10\ 000 \end{cases}$$

$$S = \sum_{i=2}^{6} U_i = 4\frac{1-(-3)^5}{1-(-3)} = 4\frac{1-(-3)^5}{4} = 1-(-3)^5$$

$$S' = 4 + 8 + 12 + \cdots \ldots \ldots . +24 + 28$$

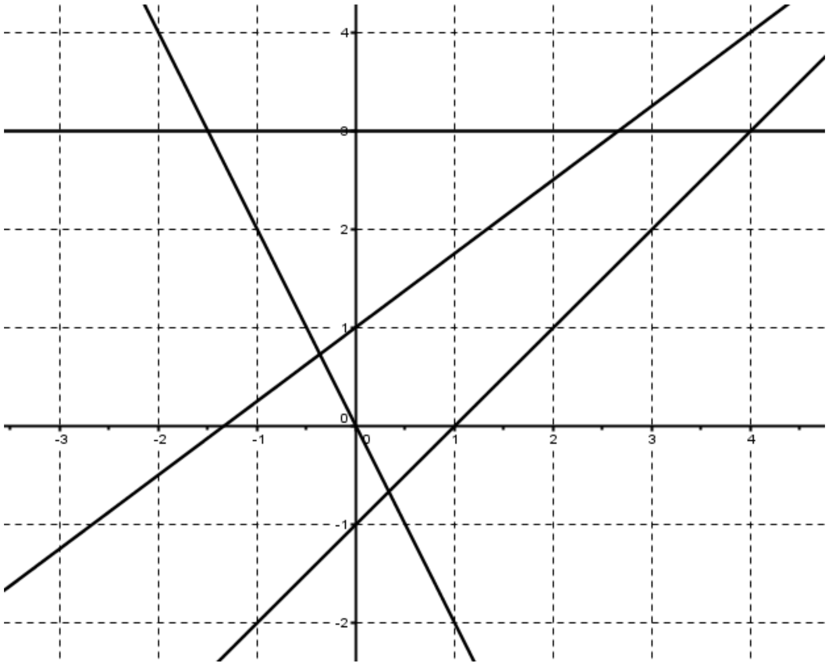
S’ est la somme de termes d’une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison 4.

Le dernier terme est $U_n = 4 + 4n = 28$. Ce qui donne n=6.

$$S' = 7\frac{4+28}{2} = 7 \times 16 = 112$$

Donner une équation de droite.

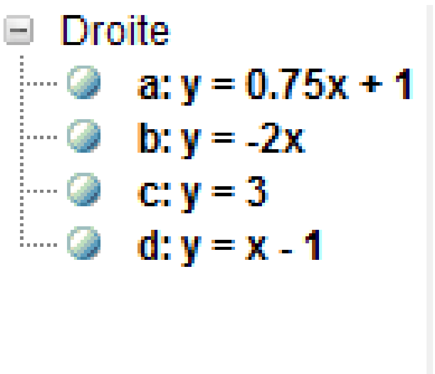
Trouver les équations des droites :



Trouver une fonction affine.

Trouver la fonction affine telle que $f(-1) = 3$ et $f(0) = 1$

Solutions.



$f(-1) = 3$ et $f(0) = 1$

f est de la forme $f(x) = ax + b$ car c'est une fonction affine.

$a = \frac{3-1}{-1-0} = \frac{2}{-1} = -2$. f s'écrit donc $f(x) = -2x + b$

Calcul de b.

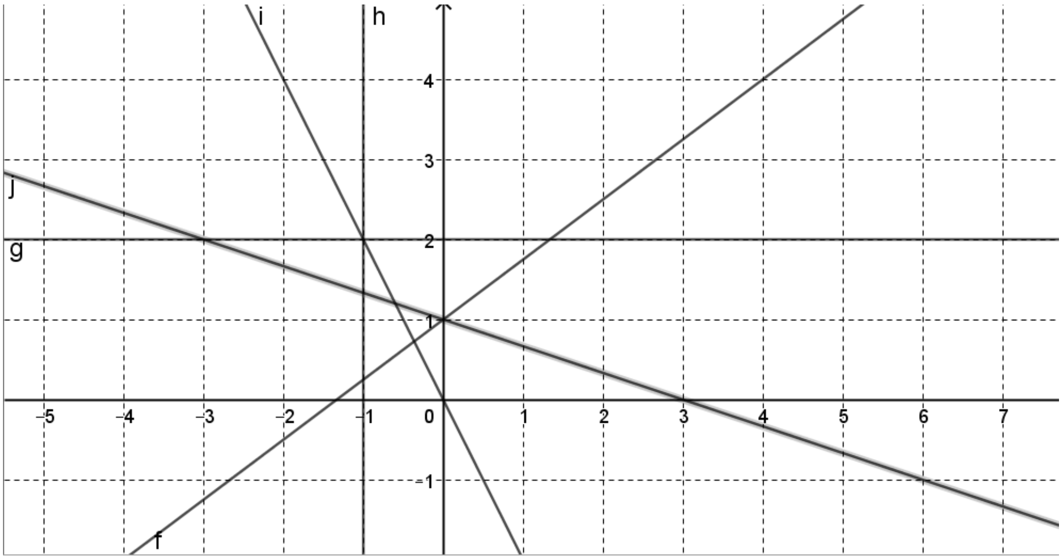
On a $f(0) = 1$. Soit $f(0) = -2 \times 0 + b = 1$

Soit $b = 1$

Solution : $f(x) = -2x + 1$

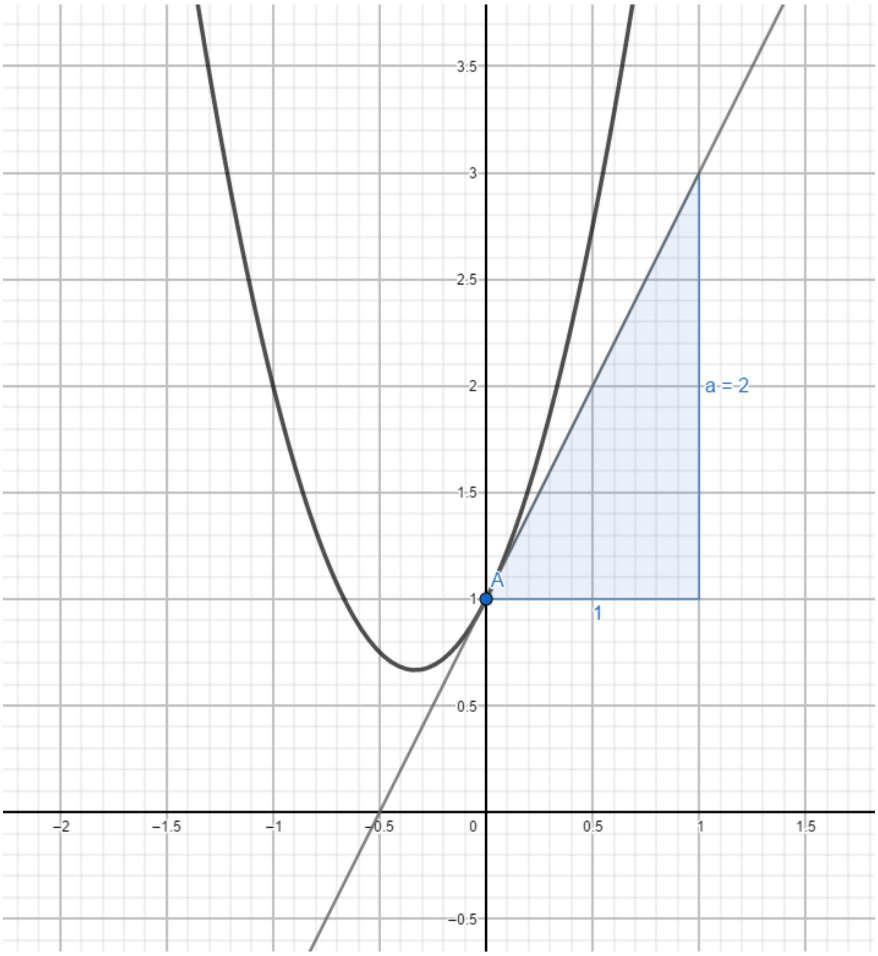
Donner des équations de droites.

Trouver les équations des droites représentées ci-dessous :

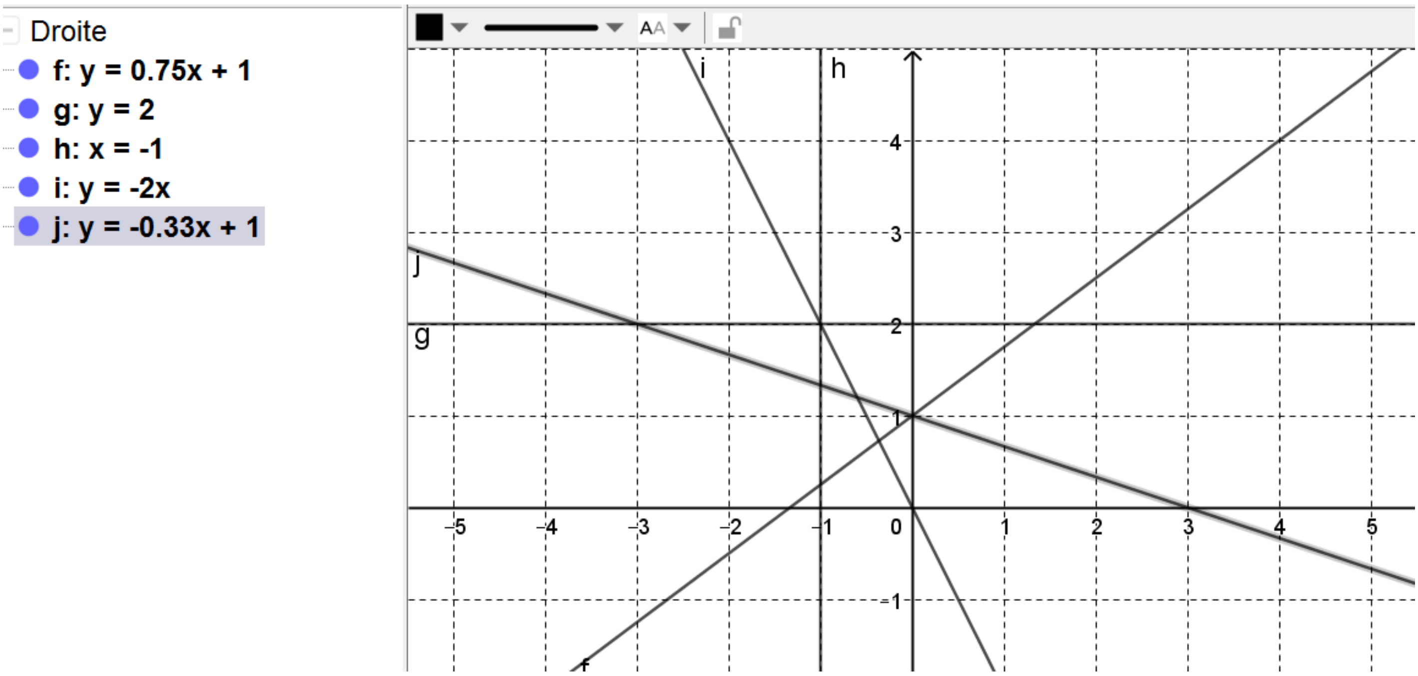


Trouver un nombre dérivé.

Trouver f'(0) en utilisant la représentation ci-dessous



<u>Correction :</u>



f’(0)=2 : c’est la pente de la tangente à la courbe pour x=0.

Calculer un nombre dérivé.

En utilisant la formule : $\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$ Calculer $f'(2)$ pour $f(x) = 3x^2$

Réaliser un tableau de signes.

Faire le tableau de signe de la fonction : $f(x) = x^2 - 3x - 4$

$f(x) = x^2 - 3x - 4$

Solutions :

$$L = \frac{3(2+h)^2 - 3\times 2^2}{h} = \frac{3(4+4h+h^2)-12}{h} = \frac{12+12h+3h^2-12}{h} = \frac{h(12+3h)}{h} = 12+3h$$

$$\boldsymbol{f'(2)} = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f(2+h)-f(2)}}{\boldsymbol{h}} = \lim_{h\to 0}(12+3\text{h}) = 12$$

---

a=1 b=-3 et c=-4

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$ $\Delta > 0$ Il y a donc deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{25}}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

x	-∞		-1		4		+∞
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Simplifications de radicaux, expression conjuguée.

Simplifier les fractions suivantes :

$A = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$ $B = \frac{2}{6-\sqrt{5}}$ $C = \frac{3}{2-4\sqrt{5}}$ $D = \frac{2}{x-\sqrt{x+1}}$

Simplifier l'expression suivante : $(3\sqrt{6}+2)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

Démontrer qu'une fonction affine est décroissante.

Montrer que la fonction $f(x) = -3x + 1$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

Solutions :

$A = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{6}\times\sqrt{12}}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{72}}{12} = \frac{3\sqrt{36}\sqrt{2}}{12} = \frac{3\times 6\sqrt{2}}{12} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$B = \frac{2}{6-\sqrt{5}} = \frac{2\times(6+\sqrt{5})}{(6-\sqrt{5})\times(6+\sqrt{5})} = \frac{2\times(6+\sqrt{5})}{36-5} = \frac{2\times(6+\sqrt{5})}{31}$

$C = \frac{3}{2-4\sqrt{5}} = \frac{3(2+4\sqrt{5})}{(2-4\sqrt{5})(2+4\sqrt{5})} = \frac{3(2+4\sqrt{5})}{4-80} = \frac{3(2+4\sqrt{5})}{-76} = -\frac{3(2+4\sqrt{5})}{76}$

$$D = \frac{2}{x-\sqrt{x+1}} = \frac{2(x+\sqrt{x+1})}{(x-\sqrt{x+1})(x+\sqrt{x+1})} = \frac{2(x+\sqrt{x+1})}{x^2-(x+1)} = \frac{2(x+\sqrt{x+1})}{x^2-x-1}$$

$$(3\sqrt{6}+2)(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 3\sqrt{18} + 3\sqrt{12} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 9\sqrt{2} + 8\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$$

On prend x_1 et x_2 deux valeurs réelles telles que $x_1 < x_2$

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -3x_1 > -3x_2 \Leftrightarrow -3x_1 + 1 > -3x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ L'ordre est inversé, la fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.

Simplifier une fraction avec radicaux. Simplifier des racines carrées.

Simplifier les expressions :

$$\frac{3}{\sqrt{(2x-1)}-\sqrt{(x+1)}}=$$

$$3\sqrt{50}+4\sqrt{108}=$$

Solutions :

$$\frac{3}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}}=\frac{3\times\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}\right)\times\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$\frac{3\times\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+1}\right)}{(2x-1)-(x+1)}=\frac{3\times\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+1}\right)}{(x-2)}$$

$$3\sqrt{50}+4\sqrt{108}=3\sqrt{25\times 2}+4\sqrt{36\times 3}=$$

$$3\times 5\sqrt{2}+4\times 6\sqrt{3}=15\sqrt{2}+24\sqrt{3}$$

Simplifier des racines carrées, utilisation de l'expression conjuguée.

Simplifier

$$\frac{3\sqrt{8}\times 4\sqrt{18}}{\sqrt{50}}\qquad\qquad \frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

Solutions :

$$\frac{3\sqrt{8}\times 4\sqrt{18}}{\sqrt{50}}=\frac{3\sqrt{4\times 2}\times 4\sqrt{9\times 2}}{\sqrt{25\times 2}}=\frac{3\times 2\sqrt{2}\times 4\times 3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$$

$$=\frac{72\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{72\times 2}{5\sqrt{2}}=\frac{144\times\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{144\sqrt{2}}{5\times 2}=\frac{72\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{10}+\sqrt{6})\times(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})\times(\sqrt{6}+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{60}+\sqrt{50}+6+\sqrt{30}}{6-5}=2\sqrt{15}+5\sqrt{2}+6+\sqrt{30}$$

Tableau de variations, fonctions associées.

Dresser le tableau de variation de la fonction $\frac{1}{\sqrt{U(x)}}$ sur le plus grand ensemble possible.

X	$-\infty$	-1	$+\infty$
U(x)			

0

Donner les variations de la fonction suivante : $l(x) = 2 - \frac{4}{x-1}$

<u>Solutions :</u>

X	-∞	-1
U(x)	↗	

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

La fonction $x - 1$ est une fonction croissante.

La fonction $\frac{4}{x-1}$ est une fonction décroissante sur $]1; +\infty[$.

La fonction $-\frac{4}{x-1}$ est une fonction croissante sur $]1; +\infty[$.

La fonction $2 - \frac{4}{x-1}$ est une fonction croissante sur $]1; +\infty[$.

Même démonstration sur $]-\infty; 1[$

X	-∞	1	+∞
$2 - \dfrac{4}{x-1}$	↗	‖	↗

Algorithme avec PYTHON

```
def f(x):
    return(4*x+1)

print("L'image de 4 est  : ",f(4))
print("L'image de 2 est  : ",f(2))
print("L'image de 0 est  : ",f(0))
```

Que donne l'exécution de ce programme ?

Dériver une fonction.

Dériver la fonction définie par $g(x) = -x^3 + 2x + 4$

Dériver la fonction définie par $f(x) = (x^2 + 1)(3x + 4)$

Solutions :

```
L'image de 4 est  :  17
L'image de 2 est  :  9
L'image de 0 est  :  1
```

$$g(x) = -x^3 + 2x + 4$$

$$f(x) = (x^2 + 1)(3x + 4)$$

$$g'(x) = -3x^2 + 2$$

$f'(x) = 2x(3x + 4) + (x^2 + 1) \times 3$

$f'(x) = 6x^2 + 8x + 3x^2 + 3 = 9x^2 + 8x + 3$

On a utilisé la dérivée de la fonction produit : $(UV)' = U'V + UV'$

Tableau de signe d'un trinôme du second degré.

Faire le tableau de signe de la fonction : $f(x) = x^2 - 6x + 8$

Equation de la tangente.

Dériver la fonction $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

Donner l'équation de la tangente en $a = 0$

Rappel pour l'équation de la tangente en a : $\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$

Solutions

$f(x) = x^2 - 6x + 8$ a=1 b=-6 et c=8

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 32 = 4$ $\Delta > 0$ Il y a donc deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+\sqrt{4}}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-\sqrt{4}}{2} = \frac{6+4}{2} = 2$

x	-∞	2	4	+∞
$f(x)$	+	O -	O +	

$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

Rappel pour l'équation de la tangente en a $\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

L'équation de la tangente en a=0 : $\boldsymbol{y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1x + 1 = x + 1}$

1) Trouver l'équation de la tangente en a=1

Rappel pour l'équation de la tangente en a

$$\boldsymbol{T_a \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

$$\boldsymbol{T_{a=1} \quad y = f'(1)(x-1) + f(1) = 20(x-1) + 14 = 20x - 20 + 14 = 20x - 6}$$

Faire le tableau de variations de la fonction

$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$

Solutions.

$f'(x) = x^2 - 2x - 3$ On étudie le signe de $x^2 - 2x - 3$ a=1 b=-2 et c=-3

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16$ $\Delta > 0$ Il y a donc deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{16}}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{16}}{2} = \frac{2-4}{2} = -1$

x	-∞		-1		3		+∞
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f		$\nearrow$	$f(-1)=\frac{8}{3}$	$\searrow$	$f(3)$=-8	$\nearrow$	

Dériver une fonction.

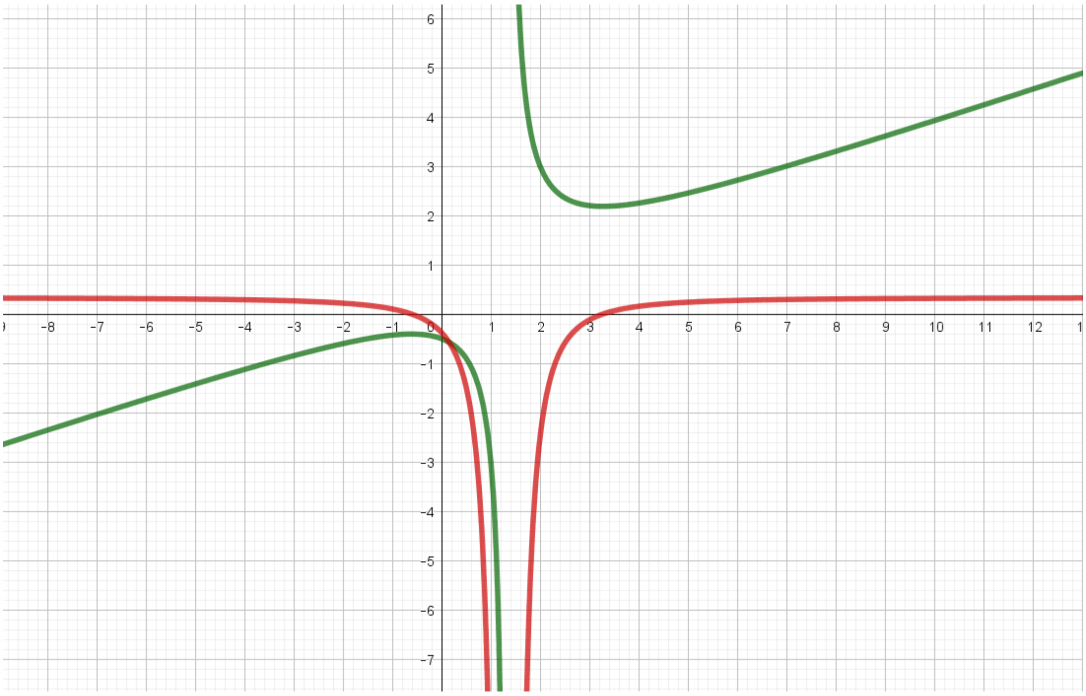
Dériver les fonctions suivantes en utilisant les formules du cours :

Rappels : $\boldsymbol{\left(g(ax+b)\right)' = a\, g'(ax+b)}$ $\qquad \boldsymbol{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ $\qquad \boldsymbol{\left(x^2\right)' = 2x}$ $\qquad \boldsymbol{\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}}$

$g(x) = \sqrt{3x-5}$ $\qquad h(x) = (4x+2)^2$ $\qquad t(x) = \frac{1}{3x+3}$

Reconnaître une dérivée à partir d'un graphique.

Quelle est la fonction ? Quelle est sa dérivée ?



Solutions.

$g(x) = \sqrt{3x-5}$ $\quad$ $h(x) = (4x+2)^2$ $\quad$ $t(x) = \frac{1}{3x+3}$

$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$ $\quad$ $h'(x) = 4 \times 2(4x+2) = 8(4x+2)$ $\quad$ $t'(x) = \frac{-3}{(3x+3)^2}$

La fonction est de couleur rouge, la fonction dérivée est de couleur verte. Mais également le contraire.

Algorithme et valeur absolue.

On considère l'algorithme suivant :

Lire (a)

Lire (b)

M $\leftarrow \frac{a+b+|a-b|}{2}$

Afficher (M)

Exécuter cet algorithme dans le tableau suivant :

a	0	4	3	-1	-2	-3	1
b	0	3	4	-2	-1	1	-3
M							

Que pouvez-vous conjecturer ?

Démontrer votre conjecture en utilisant deux cas.

Dériver une fonction.

Dériver les fonctions suivantes en utilisant les formules du cours : ***Rappel :*** $\boldsymbol{(g(ax+b))' = a\, g'(ax+b)}$

$g(x) = \sqrt{2x+2}$ $\quad h(x) = (3x+2)^3$

Solutions :

a	0	4	3	-1	-2	-3	1
b	0	3	4	-2	-1	1	-3
m	0	4	4	-1	-1	1	1

Si a>b alors $a - b > 0$ $|a - b| = a - b$ $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+a-b}{2}$ =a

Si a<b alors $a - b < 0$ $|a - b| = b - a$ $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+b-a}{2} = b$

Vérifier à l'aide de votre calculatrice.

$g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2x+2}}$ $h'(x) = 3 \times 3(3x + 2)^2 = 9(3x + 2)^2$

Utiliser le produit scalaire pour démontrer deux droites perpendiculaires.

Rappels : $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ $\vec{u}.\vec{v} = x\,x' + y\,y'$ $si\ \vec{u}.\vec{v} = 0\ alors$ $\vec{u} \perp \vec{v}$

Soit $A(1\,;1)$ $B(-1\,;2)$ $C(x;1)$ et $D(-1\,;x)$

Calculer x pour que (AB) et (CD) soit perpendiculaires.

Utiliser la colinéarité pour démontrer deux droites parallèles.

Soit $A(1\,;1)$ $B(-1\,;2)$ $C(x;1)$ et $D(-1\,;x)$

Calculer x pour que (AB) et (CD) soit parallèles.

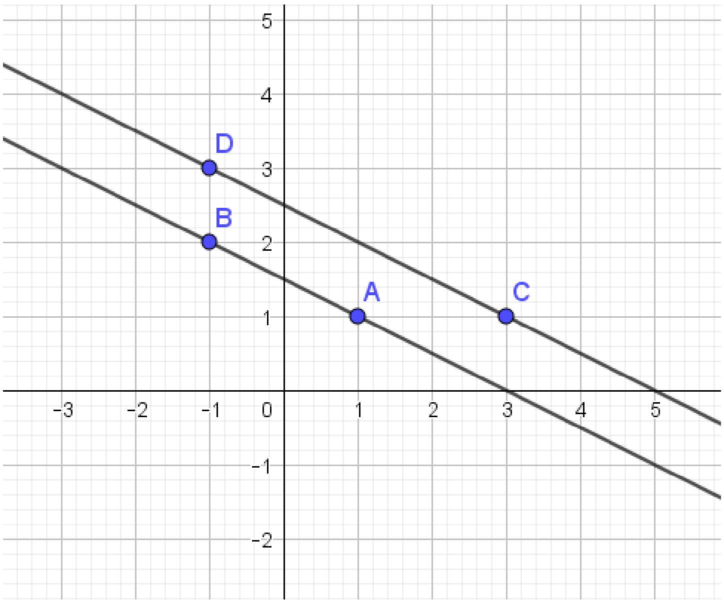
Solutions.

$\overrightarrow{AB}(-2;1)$ et $\overrightarrow{CD}(-1-x;x-1)$

$\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si $-2(x-1)-1(-1-x)=0$

$-2x+2+1+x=0 \qquad -x+3=0 \qquad -x=-3 \qquad x=3$

On a donc $C(3;1)$ et $D(-1;3)$



$\overrightarrow{AB}(-2;1)$ et $\overrightarrow{CD}(-1-x;x-1)$

$\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ sont perpendiculaires si et seulement si $-2(-1-x)+1(x-1)=0$

$2+2x+x-1=0 \qquad 3x+1=0 \qquad x=\frac{-1}{3}$

Calculer une dérivée.

Dériver la fonction $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 4)$

Produit scalaire, trouver un angle de vecteurs.

Soit les points $A(1\,;1)$ $B(-2\,;2)\ et\ C(0\,;3)$ calculer l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

Rappels : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\ AC\ \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ et

$\vec{u}(x, y)$ $\vec{v}(x', y')$ $\vec{u}.\vec{v} = x\,x' + y\,y'$

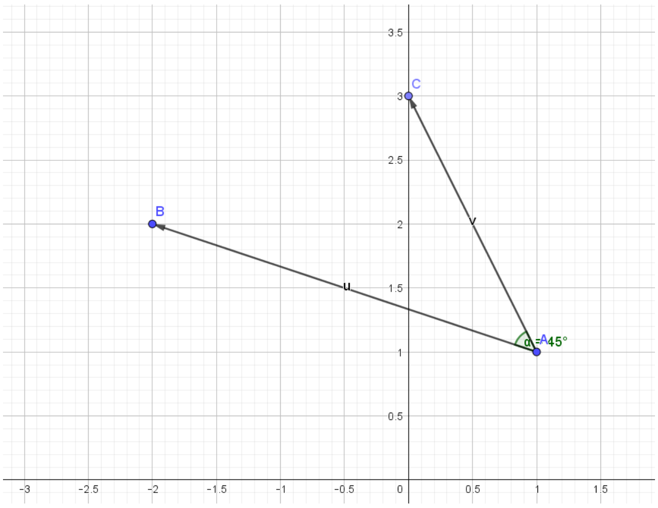
Solutions

$\overrightarrow{AB}(-3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;2)$ $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ et $AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\ AC\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \sqrt{50}\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$$

Et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3 + 2 = 5$

Donc $5 = \sqrt{50}\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ donc $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC} = cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right) = 45°$



$f'(x) = 2x(x^2-4) + (x^2+1)2x = 2x^3 - 8x + 2x^3 + 2x = 4x^3 - 6x$

Point au 05/02/2020

Dériver une fonction.

Dériver la fonction

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Solutions.

Solutions :

$$f'(x) = \tan'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = \tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

Or $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

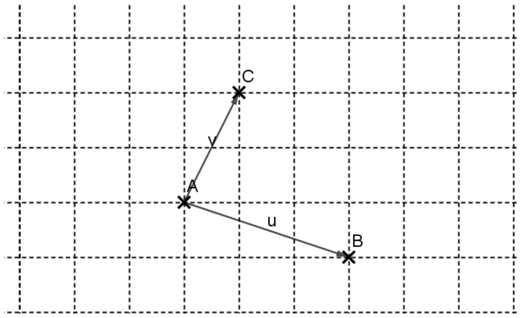
Donc

$$f'(x) = \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \ ou \ 1 + \frac{sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$$

Somme de deux vecteurs.

Construire les points en utilisant les égalités vectorielles :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$



La relation de Chasles.

Compléter les égalités vectorielles en utilisant la relation de Chasles.

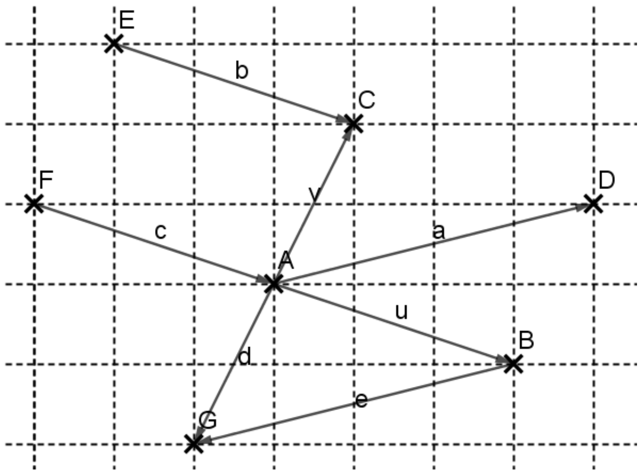
$\overrightarrow{..D} = \overrightarrow{A..} + \overrightarrow{B..}$ $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{....}$ $\quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{....}$ $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{....} = \vec{0}$

Vecteurs colinéaires.

Dans chaque cas, dire si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
Préciser si les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou si les points A,B, C sont alignés.

$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{DC}$ $\quad \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BA}$ $\quad 2\overrightarrow{BA} = 5\overrightarrow{CE}$

Solutions :



$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ $\quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD}$ Vecteurs colinéaires. Droites (AB) et (CD) sont parallèles.

$\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{DC}$ Vecteurs colinéaires. Droites (AB) et (CD) sont parallèles.

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BA}$ Vecteurs colinéaires. Points A,B,C alignés.

$2\overrightarrow{BA} = 5\overrightarrow{CE}$ Vecteurs colinéaires. Droites (AB) et (CE) sont parallèles.

Dériver une fonction.

Donner la dérivée de la fonction $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en donnant son ensemble définition.

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

$f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{U}{V}$

Avec $U = x \qquad U' = 1$

$V = x + 1 \qquad V' = 1$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x + 1 - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Trouver l'équation cartésienne d'une droite.

Soit $A(1; -1)$ et $B(2; 2)$. Donner une équation cartésienne de la droite(AB)

Montrer que deux droites sont parallèles.

Soit $(d): 2x - 4y - 1 = 0$ et $(d'): -x + 2y - 3 = 0$ deux droites définies par leurs équations cartésiennes.

Démontrer que les deux droites sont parallèles.

<u>Solutions.</u>

On trouve les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AB}(1; 3)$ $\overrightarrow{AM}(x - 1; y + 1)$

Soit $M(x\,; y)$. $M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ $et\ \overrightarrow{AB}$ $sont\ colinéaires \Leftrightarrow 1(\mathrm{y} + 1) - 3(\mathrm{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow y + 1 - 3x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -3x + y + 4 = 0$$

$(d): 2x - 4y - 1 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(4; 2)$

$(d'): -x + 2y - 3 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{v}(-2; -1)$

(d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\vec{u}(4; 2)\ et\ \vec{v}(-2; -1)\ sont\ colinéaires.$

$4 \times (-1) - 2 \times (-2) = -4 + 4 = 0$ Les vecteurs $\vec{u}(4; 2)\ et\ \vec{v}(-2; -1)\ sont\ colinéaires$.

Les droites (d) et (d') sont donc parallèles.

Montrer que deux droites sont sécantes.

Soit $(d): y = x + 3$ et $(d'): x + 2y - 3 = 0$ deux droites définies par leurs équations.

Démontrer que les deux droites sont sécantes.

<u>Solutions :</u>

$(d): y = x + 3$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 1)$

$(d'): x + 2y - 3 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{v}(-2; 1)$

(d) et (d') sont sécantes si et seulement si $\vec{u}(1; 1)\ et\ \vec{v}(-2; 1)\ ne\ sont\ pas\ colinéaires.$

$1 \times 1 - (-2) \times (1) = 1 + 2 = 3 \neq 0$ Les vecteurs $\vec{u}(1; 1)\ et\ \vec{v}(-2; 1)\ ne\ sont\ pas\ colinéaires$.

Les droites (d) et (d’) sont donc sécantes.

Montrer que deux droites sont parallèles, exercice avec paramètre.

Soit $(d): y = mx + 3$ et $(d'): x + 2y - 3 = 0$ deux droites définies par leurs équations.

1) Trouver une valeur de m pour que les deux droites soient parallèles.
2) Trouver une valeur de m pour que A(-1 ;1) appartienne à la droite (d)

Dériver une fonction quotient.

Dériver la fonction $f(x) = \frac{3x}{2x+3}$

Solutions :

$(d): y = mx + 3$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; m)$

$(d'): x + 2y - 3 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{v}(-2; 1)$

(d) et (d’) sont parallèles si et seulement si $\vec{u}(m; 1)\ et\ \vec{v}(-2; 1)\ sont\ colinéaires.$

$$1 \times 1 - (-2) \times m = 1 + 2m = 0 \quad \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$A \,\epsilon (d) \Leftrightarrow 1 = m(-1) + 3 = -m + 3 \Leftrightarrow m = 3 - 1 = 2$$

$$f'(x) = \frac{3(2x+3) - 3x(2)}{(2x+3)^2} = \frac{6x + 9 - 6x}{(2x+3)^2} = \frac{9}{(2x+3)^2}$$

Indicateurs d’une série statistiques.

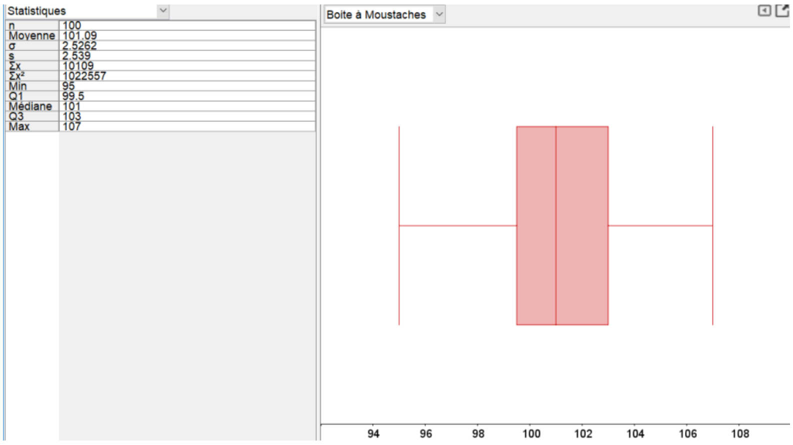
Production journalière de véhicules équipés	Nombre de jours
95	1
96	3
97	5
98	6
99	10
100	15
101	18
102	14
103	11
104	7
105	6
106	2
107	2
Total	100

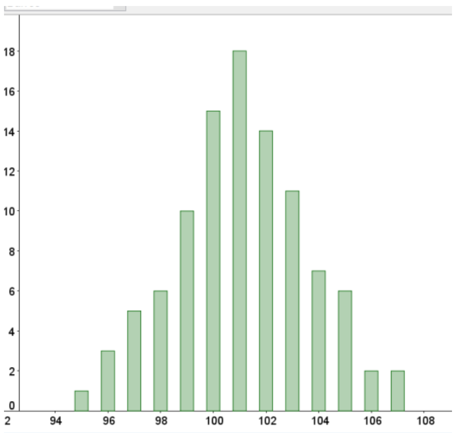
1. Calculer la moyenne $\bar{x}$, arrondie à l’unité, et l’écart type σ, arrondi à 10^{-1}, de cette série statistique.
2. Déterminer le pourcentage des valeurs comprises dans l’intervalle $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ puis $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$.

Solutions :

$\bar{x}$=101,09 $\delta \approx$ 2 ,5

68% et 97%



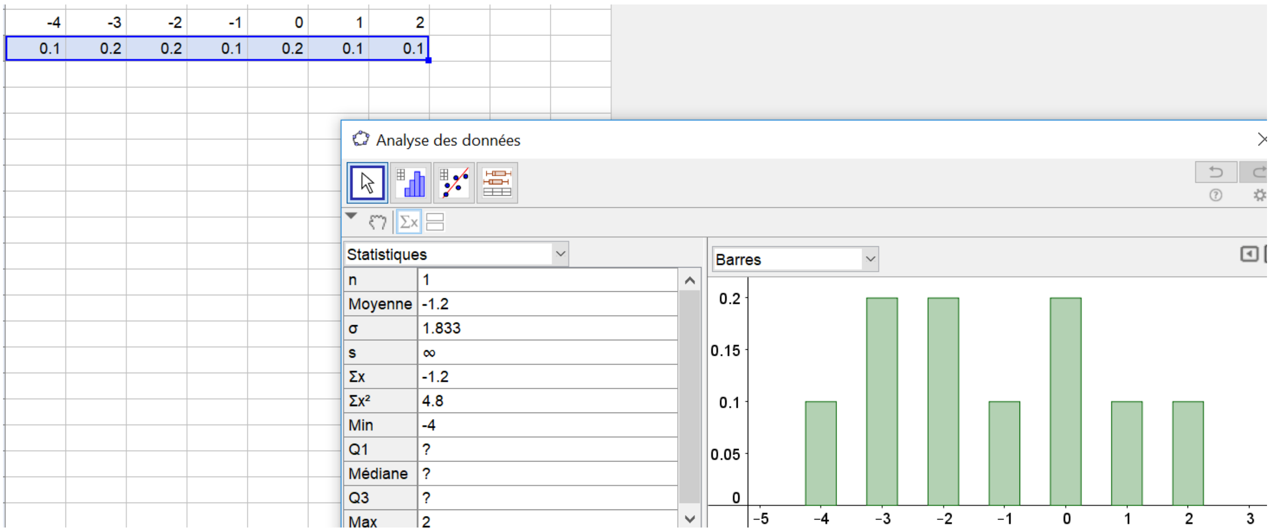


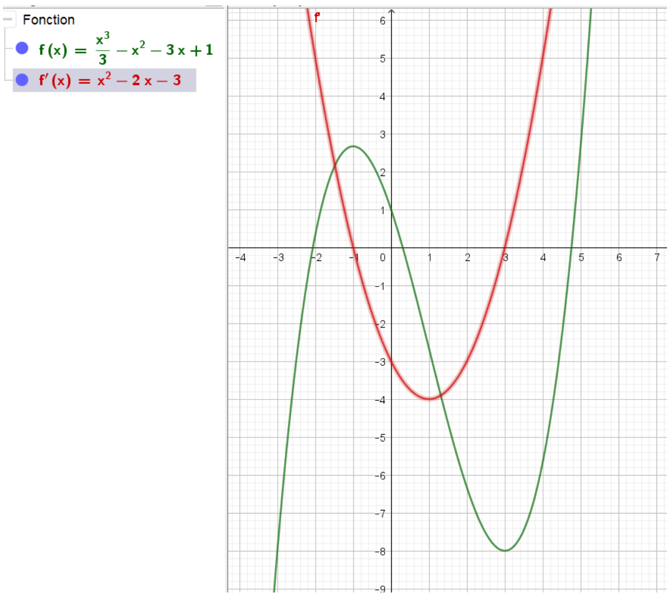
Etude d'une fonction, dérivée.

Calculer la moyenne et l'écart-type d'une série statistique.

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f_i	0,1	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1

Solutions.





Etude d'une fonction, dérivée.

Faire le tableau de variations de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x - 4$

Solutions.

Fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{3x - 4}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 8x - 6}{9x^2 - 24x + 16}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x + 1$$

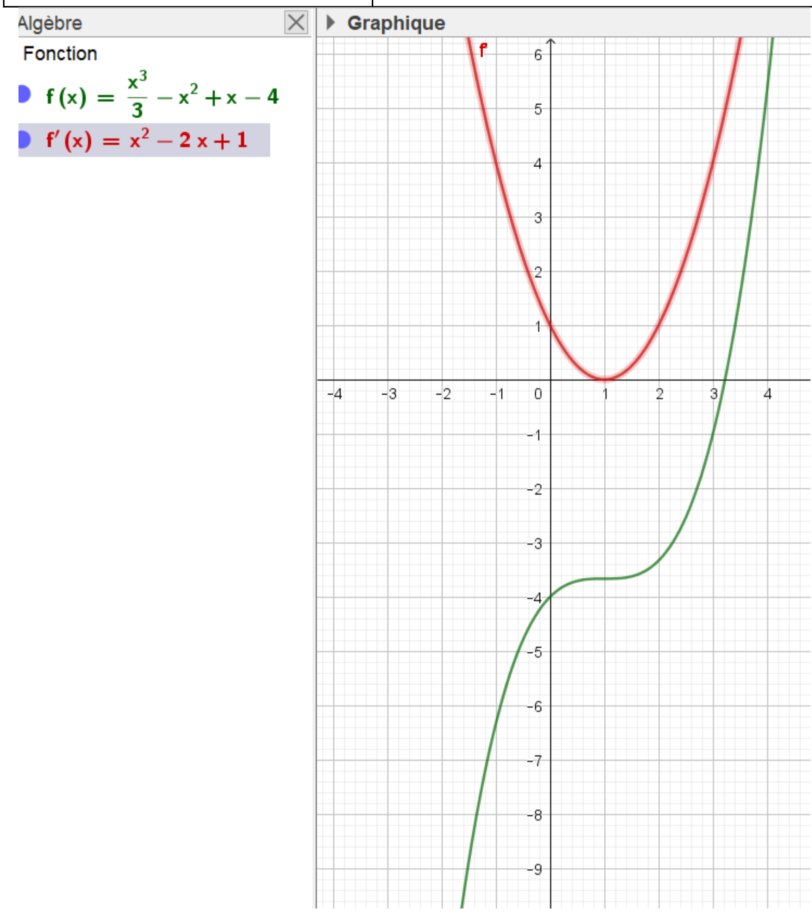
On étudie le signe de $x^2 - 2x + 1$

a=1 b=-2 et c=1

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$ $\Delta = 0$ Il y a donc une solution $x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

$f'(x)$ est du signe de a donc positive.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f					



Etude d'une fonction.

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

1) Donner son ensemble de définition.
2) Construire son tableau de variations.
3) Donner l'équation de la tangente en $a = 0$

Rappel pour l'équation de la tangente en a

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

4) Faire un rapide croquis.

Solutions :

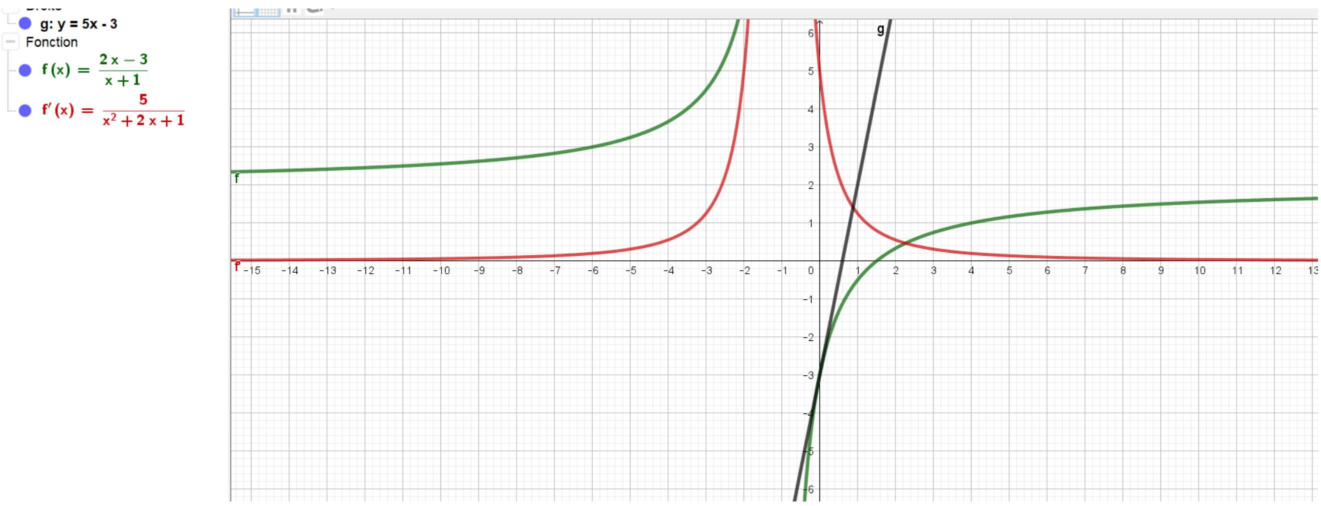
$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

1) $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$
2) $f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x-3)1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$

$$f'(x) > 0 \quad sur \quad =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
f	↗	‖	↗

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 5x - 3$$

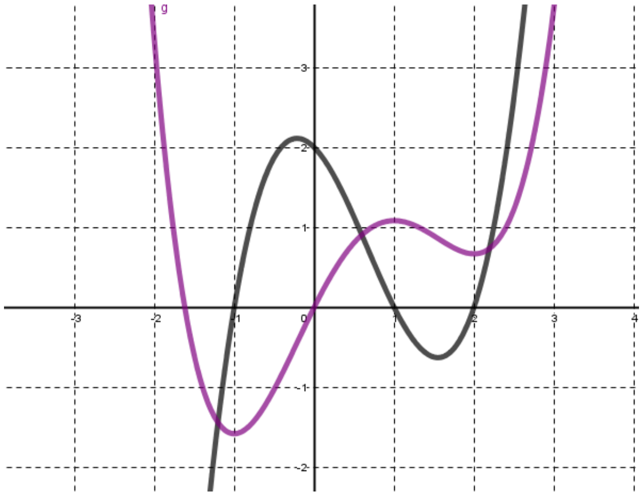


Graphique autour de la dérivée.

On considère une fonction définie par le graphique ci-dessous :

Proposer une fonction dont la dérivée pourrait être la fonction représentée graphiquement.

Solution :



Variable aléatoire, loi de probabilité.

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."
On considère le jeu suivant :
- Si on tire un cœur, on gagne 2€.
- Si on tire un roi, on gagne 5€.
- Si on tire une autre carte, on perd 1€.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.
Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

Solutions :

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, -1 mais aussi 7.
En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 5(roi) + 2(cœur) = 7€.
Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), X = 2.

$P(X = 2) = \frac{7}{32}$.

- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), X = 5.

$P(X = 5) = \frac{3}{32}$.

- Si la carte tirée est le roi de cœur, X = 7.

$P(X = 7) = \frac{1}{32}$.

- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, X = -1.

$P(X = -1) = \frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$E(X) = \frac{21}{32}\times(-1)+\frac{7}{32}\times 2+\frac{3}{32}\times 5+\frac{1}{32}\times 7 = \frac{15}{32}.$$

$$V(X) = \frac{21}{32}\times\left(-1-\frac{15}{32}\right)^2+\frac{7}{32}\times\left(2-\frac{15}{32}\right)^2+\frac{3}{32}\times\left(5-\frac{15}{32}\right)^2+\frac{1}{32}\times\left(7-\frac{15}{32}\right)^2 \approx 5,1865$$

$\sigma(X) \approx \sqrt{5{,}1865} \approx 2{,}28$.

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0{,}5$ signifie qu'en jouant, on peut espérer gagner environ 0,50€.

L'écart-type est environ égal à 2,28 signifie qu'avec une espérance proche de 0,50 le risque de perdre de l'argent est important.

Etude d'une variable aléatoire.

Une urne contient 10 boules bleues, 7 boules rouges, 2 boules vertes, 1 boule Jaune. Un joueur tire au hasard une boule de l'urne et note sa couleur : B, R, V, J.

Il gagne 1 euro s'il tire une boule rouge, 2 euros s'il tire une boule verte mais perd 3 euros s'il tire la boule jaune. Il ne gagne et ne perd rien d'il tire une boule bleue.

Soit G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique (positif ou négatif) du joueur lors d'une partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.
2. Déterminer la probabilité de l'événement « G>0 »

Le joueur joue au Japon où le taux est de 108 yens pour un euro. De plus il doit payer 100 yens pour jouer.

3. Exprimer la variable aléatoire Y donnant le gain du joueur en yens en fonction de la variable G.
4. Etablir la loi de probabilité de Y.
5. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type des deux lois. Vérifier la propriété du cours :

$$\boldsymbol{E(aX+b) = aE(X)+b \quad et \quad V(aX+b) = a^2V(X)}$$

<u>Solutions.</u>

Toutes le boules ont la même chance d'être tirées. On est donc dans un modèle d'équiprobabilité.

On obtient les probabilités suivantes :

Issues possibles	R	V	J	B
Probabilités	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{10}{20}$

G est la variable aléatoire qui donne le gain du joueur.

La loi de probabilité de G est donnée par le tableau suivant :

$G = g_i$	1	2	-3	0
$p_i = P(G = g_i)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{10}{20}$

$$P(G > 0) = P(G = 1) + P(G = 2) = \frac{7}{20} + \frac{2}{20} = \frac{9}{20}$$

La loi Y est donnée par la formule $Y = 108G - 100$. On obtient donc la loi de probabilité pour Y :

$Y = y_i$	8	116	-424	-100
$p_i = P(Y = y_i)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{10}{20}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(G)} = 1.02$

$E(G) = 0{,}4$

$V(G) = 1.04$

$E(Y) = -56{,}8$

$V(Y) = 12130{,}56$ $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = 110{,}14$

Le jeu est favorable pour le joueur en France mais pas au Japon.

Etude d'une loi associée à une variable aléatoire.

On considère la variable aléatoire X et la loi de probabilité associée :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5
$p_i = P(X = x_{i_i})$	0,2	0,1	0,2	0,15	0,15	

1) Compléter la loi de probabilité.
2) Calculer :
   $P(1 \leq X \leq 3)$ $P(X < 2)$ $P(X \geq 3)$ $P(0 < X < 4)$ $P(X < 1)$ $P(4 \leq X)$
3) Calculer l'espérance, et l'écart-type.

Solutions :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5
$p_i = P(X = x_{i_i})$	0,2	0,1	0,2	0,15	0,15	**0,2**

$P(1 \leq X \leq 3) = 0{,}45$ $P(X < 2) = P(X \leq 1) = 0{,}3$ $P(X \geq 3) = 0{,}5$

$P(0 < X < 4) = P(1 \leq X \leq 3) = 0{,}45$ $P(X < 1) = P(X = 0) = 0{,}2$ $P(4 < X) = P(X = 5) = 0{,}2$

$$E(X) = 2{,}55$$
$$\delta(X) = 1{,}77$$

Etude d'une fonction.

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{-x-3}{-x+1}$

5) Donner son ensemble de définition.
6) Construire son tableau de variations.
7) Donner l'équation de la tangente en $a = 0$

Rappel pour l'équation de la tangente en a

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

8) Faire un rapide croquis.

Solutions :

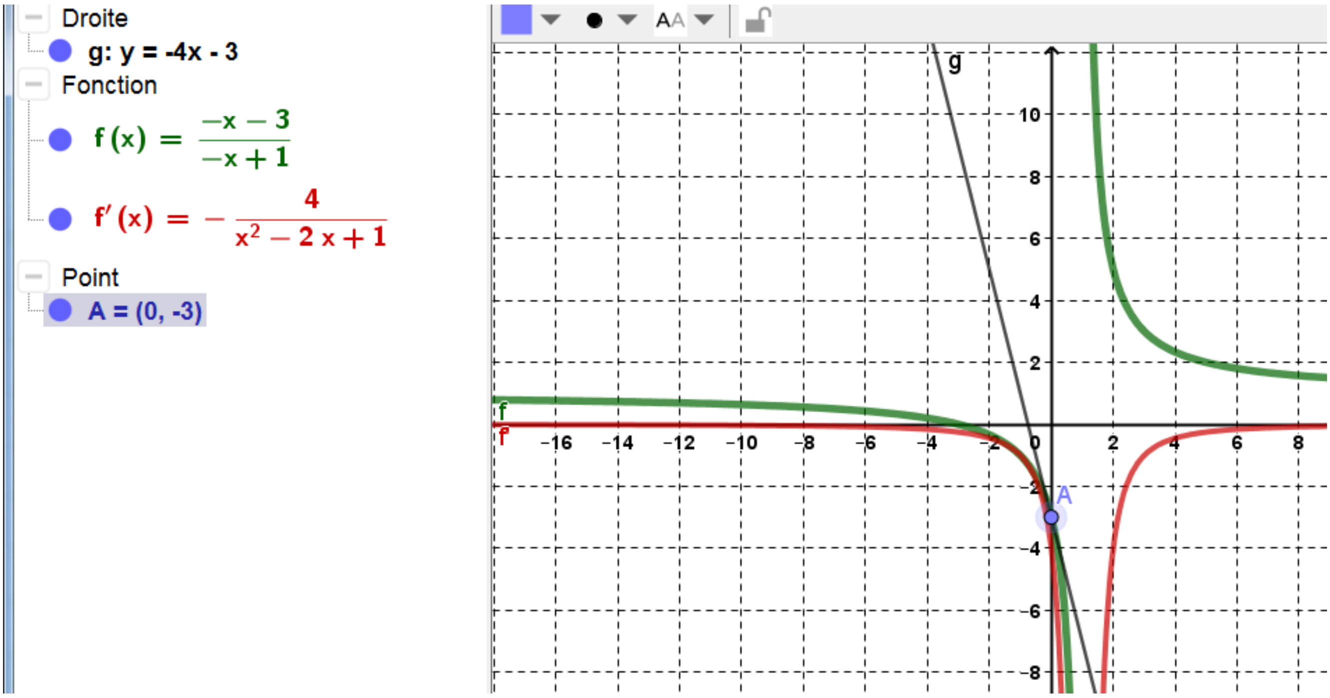
$$f(x) = \frac{-x-3}{-x+1}$$

3) $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$
4) $f'(x) = \frac{-(-x+1)-(-x-3)(-1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1-x-3}{(x+1)^2} = \frac{-4}{(x+1)^2}$

$$f'(x) < 0 \quad sur \quad =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

x	$-\infty$	1		$+\infty$
$f'(x)$	-	‖	-	
f	↘	‖	↘	

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = -4x - 3$$



Dériver une fonction.

- Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Résoudre une équation trigonométrique.

- Résoudre sur]-π ;π] l'équation :

$$\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Résoudre une équation trigonométrique.

- Résoudre l'équation :

$$\sin(x) = \frac{-1}{2}$$

Résoudre une inéquation trigonométrique.

- **Résoudre dans [0 ;2π[, puis dans**]-π ;π].

$$\sin(x) > \frac{-1}{2}$$

Transformer une expression en utilisant l'expression conjuguée.

- Transformer l'expression pour qu'il n'y ait plus de radicaux au dénominateur :

$$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$$

Solutions :

$$\sin(x) > \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x \in [0; \frac{7\pi}{6}[\cup]\frac{11\pi}{6}; 2\pi[\Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{6}; \pi] \cup]-\pi; -\frac{5\pi}{6}]$$

$$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{10}+\sqrt{6}) \times (\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6}-\sqrt{5}) \times (\sqrt{6}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{60}+\sqrt{50}+6+\sqrt{30}}{6-5} = 2\sqrt{15}+5\sqrt{2}+6+\sqrt{30}$$

Solutions :

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\,(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2$$

$$\cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Sur]-π ;π] $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

$$\sin(x) = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Trigonométrie, formules d'addition et de soustraction.

Rappels :

$$cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sin(a)\,sin(b)$$

$$cos(a-b) = cos(a)\,cos(b) + sin(a)\,sin(b)$$

$$sin(a-b) = sin(a)\,cos(b) - cos(a)\,sin(b)$$

$$sin(a+b) = sin(a)\,cos(b) + cos(a)\,sin(b)$$

Simplifier $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \quad et \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

Solutions :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(x)\,.\frac{1}{2}-\sin(x)\,.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)}{2}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin(x)\,.\frac{1}{2}+\cos(x)\,.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sin(x)+\sqrt{3}\cos(x)}{2}$$

Formules trigonométriques.

Démontrer que $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos(x)$

Les suites.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\begin{cases} U_{n+1}=\frac{2U_n}{3U_n+2} \\ U_0=1 \end{cases}$

Calculer les premiers termes.

Solutions :

On utilise le formulaire :

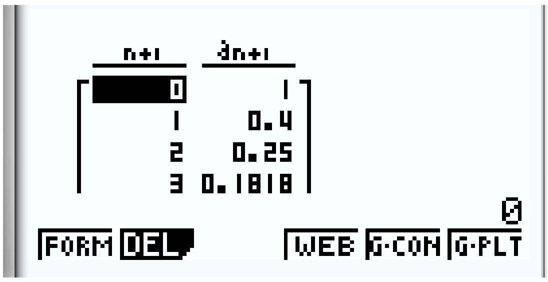
$$cos(a+b)=cos(a)\,cos(b)-sin(a)\,sin(b)$$

$$cos(a-b)=cos(a)\,cos(b)+sin(a)\,sin(b)$$

$$sin(a-b)=sin(a)\,cos(b)-cos(a)\,sin(b)$$

$$sin(a+b)=sin(a)\,cos(b)+cos(a)\,sin(b)$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(x)\,.\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin(x)\,.\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin(x)\,.\frac{\sqrt{2}}{2}+cos(x).\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\cos(x)$$



Calculer une somme.

Calculer, en utilisant la calculatrice, $\sum_{i=0}^{6} u_i$ avec u_n suite géométrique de raison 4 et de premier terme 2

$$\sum_{i=0}^{6} u_i = \sum_{i=0}^{6} 2 \times 4^i = 10922$$

Prouver qu'une suite est géométrique.

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n + 2 \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} V_n = U_n + 1 \\ V_0 \end{cases}$$

Prouver que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Ecrire V_n en fonction de n. En déduire U_n en fonction de n

Solutions :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} + 1}{U_n + 1} = \frac{3U_n + 2 + 1}{U_n + 1} = \frac{3(U_n + 1)}{U_n + 1} = 3$$

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $V_0 = 1 + 1 = 2$

$$V_n = 2 \times 3^n$$

$V_n = U_n + 1$ donc $U_n = V_n - 1 = 2 \times 3^n - 1$

Calculer une distance, des coordonnées de vecteurs.

$$\boldsymbol{Formule\ n°1\ :\ I(x_I, y_I)\ milieu\ de\ [AB]} \qquad \boldsymbol{I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{Formule\ n°2\ :\ AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

$$\boldsymbol{Formule\ n°3\ :\ \overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)}$$

- Calculer la distance AB avec A(-1 ;-3) et B(-2 ;4)
- Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Montrer que deux droites sont parallèles.

Rappel : $la\ droite\ (d)\ d'équation : ax + by + c = 0\ a\ pour\ vecteur\ directeur\ le\ vecteur\ \vec{u}(-b; a)$

Soit $(d): -x - 4y - 1 = 0$ et $(d'): 4x + 2y - 3 = 0$ deux droites définies par leurs équations cartésiennes.

Donner un vecteur directeur de chacune des droites.

Solutions.

$$AB = \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (4 - (-3))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\,(-2 + 1; 4 - (-3))$$

$$\overrightarrow{AB}\,(-1;7)$$

$(d)::-x-4y-1=0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(4;-1)$

$(d'): 4x+2y-3=0$ a pour vecteur directeur $\vec{v}(-2;4)$

Utiliser l'équation d'un cercle.

- **Donner le rayon et les coordonnées du centre du cercle d'équation :**

$$(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^2+\left(\boldsymbol{y}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^2=\mathbf{8}$$

Trouver l'équation d'un cercle.

- **Donner le rayon et les coordonnées du centre du cercle d'équation :**

$$\boldsymbol{x}^2-4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{y}=\mathbf{1}$$

Solutions :

- $(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^2+\left(\boldsymbol{y}+\frac{1}{2}\right)^2=\mathbf{8}\ \ \boldsymbol{centre}\ \boldsymbol{A}\left(\mathbf{2};-\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{et}\ \boldsymbol{R}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}$

- $\boldsymbol{x}^2-4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{y}=\mathbf{1}\Leftrightarrow(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^2+\left(\boldsymbol{y}+\frac{1}{2}\right)^2-\mathbf{4}-\frac{1}{4}=\mathbf{1}\Leftrightarrow(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^2+\left(\boldsymbol{y}+\frac{1}{2}\right)^2=\mathbf{1}+\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{4}}=\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{4}}$

$$\boldsymbol{Cerle\ de\ centre\ E}\left(\mathbf{2};-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{et}\ \boldsymbol{R}=\frac{\sqrt{\mathbf{21}}}{\mathbf{2}}$$

Calculer avec une loi binomiale.

$X->B(n\,;p)\quad E(X)=n.p\quad (Espérance\ qui\ correspond\ à\ la\ moyenne)\quad V(X)=n.p.(1-p)\quad (Variance)$
$\delta(X)=\sqrt{V(X)}\quad (Ecart-type)$

Calculs à la calculatrice :

$P(X=k)$ *Casio, stat,dist,BINM Bpd TI,distrib,BinomFdp*

$P(X\leq k)$ *Casio, stat,dist,BINM Bcd TI,distrib,BinomFrep*

Soit X, la variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=0{,}45$.

$X->B(200\,;0{,}45)$

Calculer $P(X=80)$, $P(X\leq 85)$ $P(X>90)$ $\boldsymbol{E(X)}$ $\boldsymbol{V(X)}$ $\boldsymbol{\sigma(X)}$

$X->B(200\,;0{,}45)$

$P(X=80)=0{,}02$, $P(X\leq 85)=0{,}26$ $P(X>90)=0{,}47$ $\mathrm{E(X)}=90$ V(X)=49,5 $\sigma(\mathrm{X})=7$

Loi binomiale, rédaction.

Une société produit des composants électroniques. Une étude statistique montre que 2% des produits sont défectueux. Cette société prélève un lot de 70 composants dans son stock pour effectuer des tests. On suppose le stock suffisamment important pour considérer le tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de composants électroniques défectueux.

Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Calculer la probabilité d'avoir 2 composants défectueux.

Calculer la probabilité d'avoir au plus 5 composants défectueux.

Calculer la probabilité d'avoir au minimum un composant défectueux.

Solution.

L'épreuve élémentaire : 'prélever un composant dans le stock' n'a que deux issues possibles :

- Le composant est défectueux : $p = 0{,}02$
- Le composant n'est pas défectueux : $q = 1 - p = 0{,}98$

On répète de manière identique et indépendante 70 fois ce prélèvement car il est considéré comme un tirage avec remise.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de composants défectueux suit alors une loi binomiale de paramètres n=70 et $p = 0{,}02$

$$X -> B(70\,;0{,}02)$$

$$P(X = 2) = 0{,}245$$

$$P(X \leq 5) = 0{,}997$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 0{,}757$$

Intervalle de fluctuation au seuil de 95% pour la loi binomiale.

Trouver l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% associé à la variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres B(100 ;0,5)

Application : j'affirme qu'une pièce lancée 100 fois où je trouve 42 « piles » n'est pas truquée. Qu'en pensez-vous ?

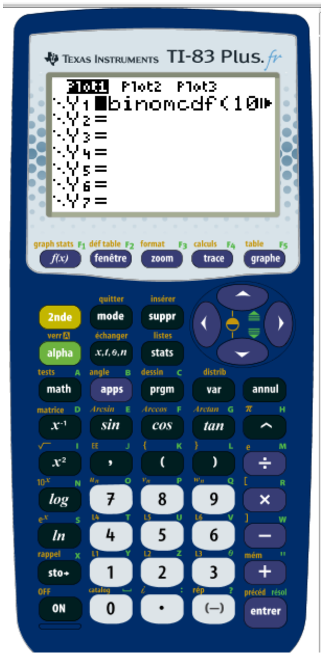
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associée à la variable aléatoire X est : $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ où :

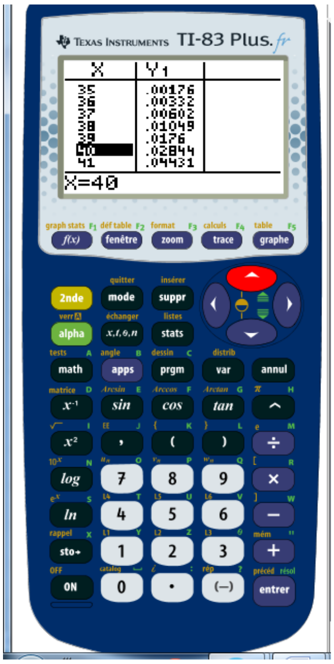
- a est le plus petit entier tel que : $P(X \leq a) > 0{,}025$,
- b est le plus petit entier tel que : $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

Indications calculatrices pour établir la table de la variable aléatoire B(100,0.5)

Sur TI :

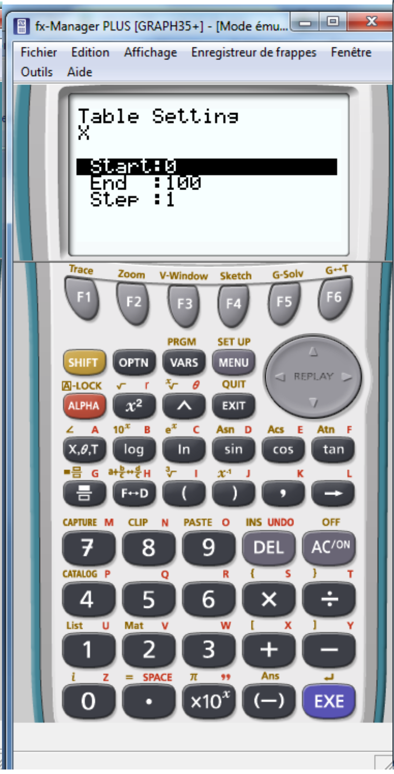
Il faut taper Binomcdf(100,0.5,x) dans la panneau f(x) de saisie des fonctions.





<u>Sur Casio</u>

MENU ->TABLE. Ttaper Binomcd(X,100,0.5). Il faut aller chercher la fonction dans catalogue.



On trouve a=40 et b=60. L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est donc **[0,4 ;0,6]**

0,42∈[0,4 ;0,6] Je peux donc affirmer que la pièce n'est pas truquée au seuil de 95%