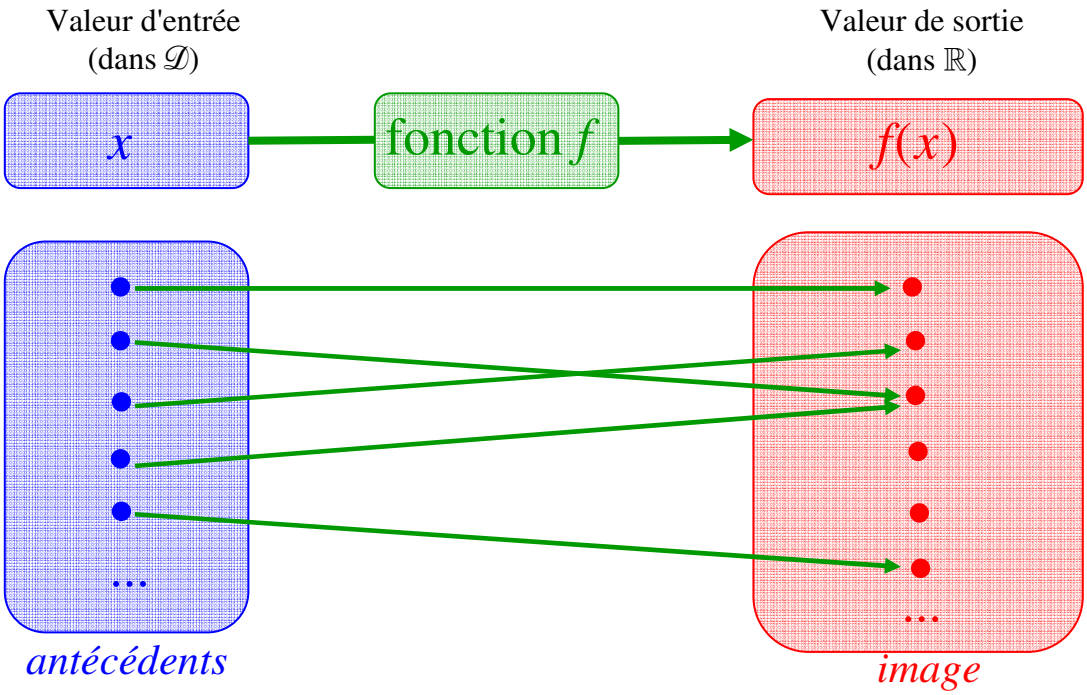
Fonction 1. Généralités sur les fonctions, résolution approchée d'équations

I/ Rappels sur les fonctions

Définitions : Notons $\mathscr{D}_f$ un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

On définit une ***fonction*** f de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbb{R}$ en associant à chaque réel x de $\mathscr{D}$ un **unique** noté $f(x)$.

Cette fonction f est alors notée : $f : x \mapsto f(x)$.



Lecture : $f(x)$ se lit "f de x".

- x s'appelle **la variable**.
- $f(x)$ s'appelle **l'image de x par f**, elle est toujours .....
- $\mathscr{D}_f$ est appelé **l'ensemble de définition**. $\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \text{ existe}\}$
- Si $y = f(x)$ alors x est un **antécédent de y par f**, il n'est pas forcément unique.

Exemple : On considère f la fonction définie par $f(x) = 2 - 3x$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

1/ Déterminer l'ensemble de définition de f.

.....

2/ Calculer l'image de 1 :

Méthode : Pour calculer l'image de 1 par f, il suffit de remplacer x par 1 dans l'expression de $f(x)$.

.....

3/ Calculer le ou les antécédents de 1 par f.

Méthode : Pour calculer les antécédents de 1 par f, il suffit de résoudre l'équation $f(x)=1$.

.....

.....

.....

II/ Courbe représentative

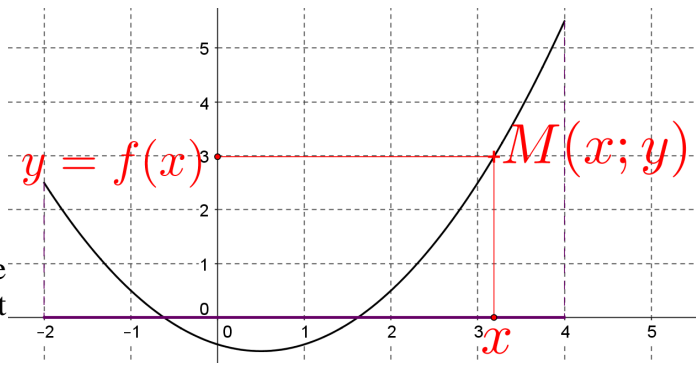
Définition : Dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est l'ensemble des points $M(x;y)$ où :

- l'abscisse x décrit l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.
- l'ordonnée y est l'image de x par f.

Ce qui se note : $M(x\ ;\ y) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathscr{D}_f \\ \text{et} \\ y = f(x). \end{cases}$

Autrement dit :

Théorème : un point M$(x\ ;\ y)$ appartient à la courbe représentative de f, si et seulement si ses coordonnées vérifient la relation $y = f(x)$, appelée **équation de la courbe** $\mathscr{C}$.



Exercice :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}+3$. f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ (*non tracée ici*). Par **calcul**, répondez à :

1/ Le point A de coordonnées (4 ; 5) appartient-il à $\mathscr{C}_f$?

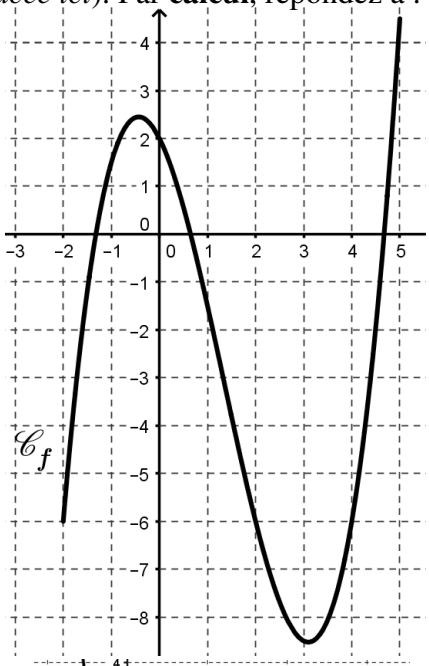
.....

.....

2/ Le point B de coordonnées (2 ; 4.5) appartient-il à $\mathscr{C}_f$?

.....

.....



Exemple :

Lire pour la fonction représentée ci-contre :

1/ L'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

……

2/ L'image de 3 par f.

……

3/ Le ou les antécédents de 2 par f.

……

III/ Résolution d'équation

1/ Méthode pour résoudre graphiquement $f(x)=k$

Dans un repère, est tracée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f.

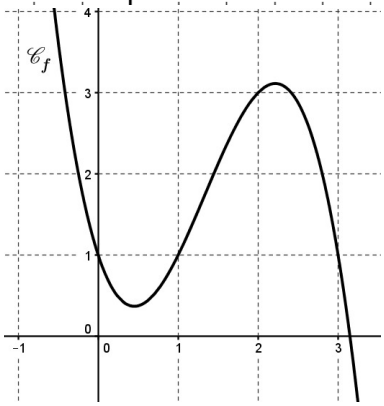
Pour $f(x)=k$:

On trace la ……..……..……..……..……..…..

Les solutions de l'équation $f(x)=k$ sont les ……..……..…

……

entre $\mathscr{C}_f$ et la droite horizontale d'équation $y=k$.



Exemple : $f(x)=1$: ……

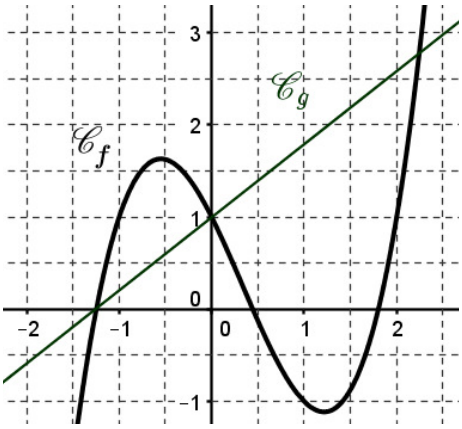
2/ Méthode pour résoudre graphiquement $f(x)=g(x)$

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g sont tracées .

Pour $f(x)=g(x)$:

Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont ……

……



Exemple : $f(x)=g(x)$: …….

3/ Résoudre de manière approchée une équation de la forme $f(x)=k$

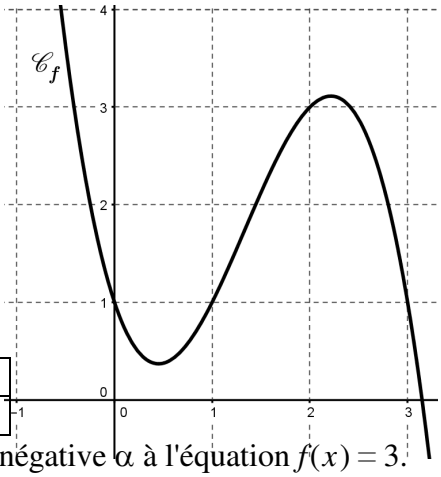
La fonction tracée ci-contre est définie par $f(x)=-x^3+4x^2-3x+1$.

1/ Savez-vous résoudre de manière exacte l'équation $f(x)=3$? ….....

2/ Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=3$: ….....

3/ Comme toute résolution graphique est imprécise, on désire obtenir une plus grande précision quant à la solution négative.

Pour cela, on va utiliser un tableau de valeurs de la fonction f. En voici un :



x	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
$f(x)$	9	7.669	6.472	5.403	4.456	3.625	2.904	2.287	1.768	1.341	1

a/ A l'aide du tableau de valeurs ci-dessus, donner un encadrement de la solution négative α à l'équation $f(x)=3$.

….....

.....

b/ Quelle est la précision de cet encadrement ? ….....

4/ On veut obtenir à l'aide d'un tableur un tableau de valeurs similaire à celui du 3/ mais donnant une valeur approchée à 10^{-2} près de la même solution de $f(x) = 3$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	X											
2	f(x)											

a/ Quelle valeur saisir dans la cellule B1 en utilisant l'encadrement du 3/a/ ? ….....

b/ Quelle valeur saisir dans la cellule C1 afin que la précision obtenue soit de 10^{-2} ? ….....

c/ Quelle formule saisir dans la cellule B2 afin d'obtenir par simple glissement l'image du nombre saisi dans la cellule supérieur de la ligne B par la fonction définie par ? ….....

….....

d/ Quel encadrement obtient-on grâce à ce tableau de valeurs ? .....

IV/ Parité d'une fonction

a/ Découverte

Simplifier les puissances ci-dessous en fonction de x : $(-x)^2$ = ... ; $(-x)^3$ = ... ; $(-x)^4$ = ... ; $(-x)^{11}$ = ...
Plus généralement :

Propriété :

- $(-x)^n$ = ...
- $(-x)^n$ = ...

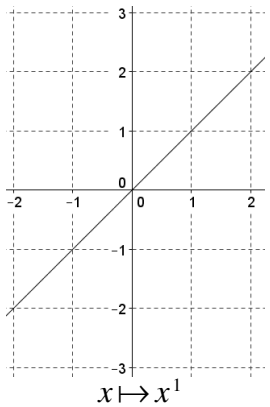
2/ Définitions et propriétés

Définition :

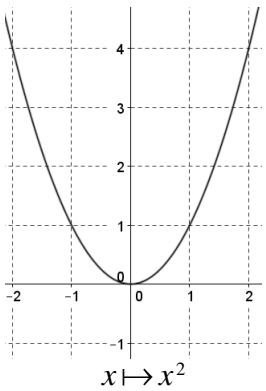
On considère un intervalle I, centrée sur 0, c'est-à-dire que si x appartient à I, alors $-x$ aussi.
Soit f une fonction définie sur cet intervalle I, centrée sur 0.

- On dit que f est une fonction paire lorsque, pour tout réel x de I, on a : .....,
- On dit que f est fonction impaire lorsque, pour tout réel x de I, on a : .....

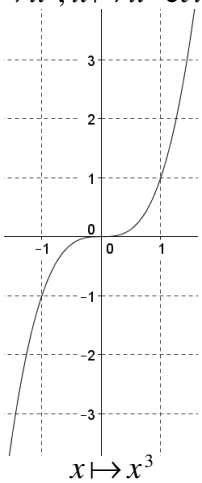
Voici ci-dessous les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^1$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$.



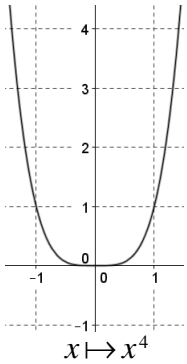
$x \mapsto x^1$



$x \mapsto x^2$



$x \mapsto x^3$



$x \mapsto x^4$

Quelle propriété liant la parité de la fonction et une symétrie sur sa courbe représentative pouvez-cous conjecturer ?

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle centrée sur 0. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

- f est une fonction paire si, et seulement si, la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à .....

  .....

- f est une fonction impaire si, et seulement si, la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à .....

  .....