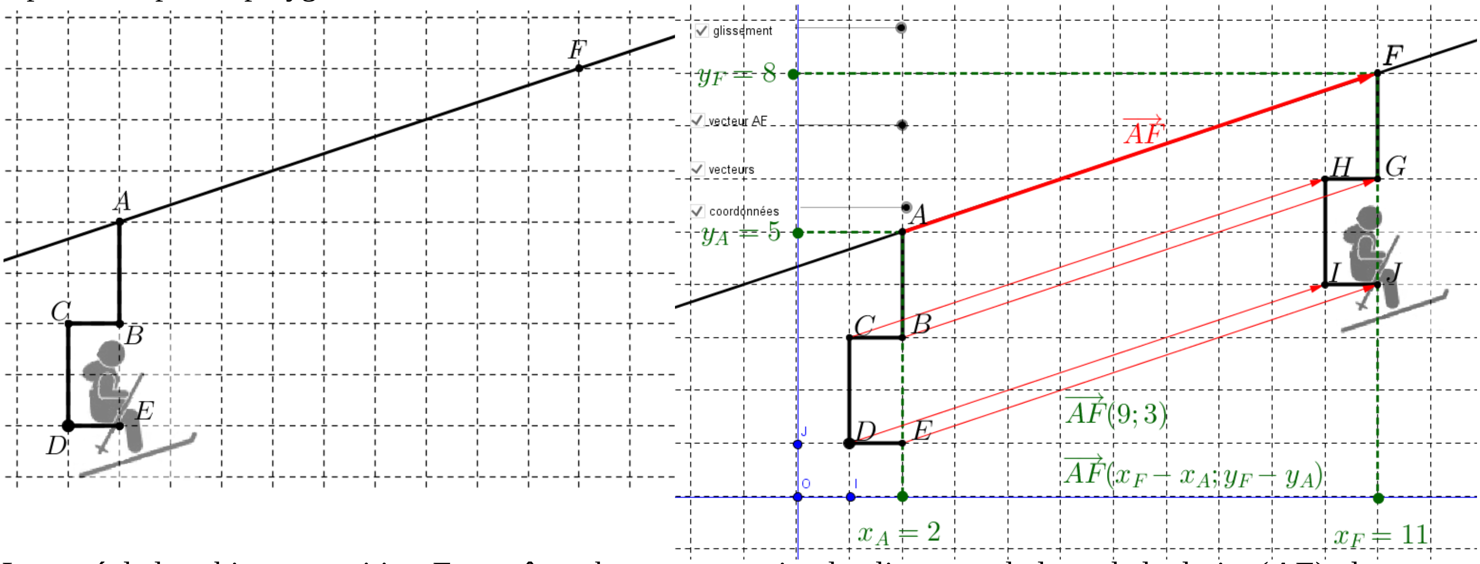
Géométrie. Vecteur 1. Vecteurs du plan

I/ Introduction aux notions de translation et de vecteurs

Une cabine téléphérique représentée par le polygone $ABCDE$ est fixé le long d'un câble qui est tiré.
Elle est fixée au câble initialement en position A. Le câble étant tiré, le point de fixation se trouve en F.
1/ Tracer cette cabine téléphonique lorsque le point de fixation a glissé en position F. Cette cabine sera représentée par un polygone $FGHIJ$.



Le tracé de la cabine en position F peut être obtenu par un simple glissement le long de la droite (AF), dans le sens de A vers F et de longueur AF.
Un tel glissement est appelé translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$.

Remarque :

La translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$ est caractérisée par :

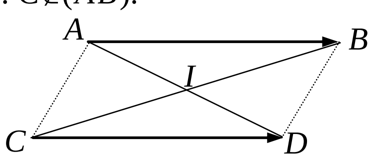
- sa direction : celle de la droite (AF).
- son sens : celui de A vers F.
- sa longueur : AF.

2/ Quel serait le tracé si on considère la translation de vecteur $\overrightarrow{EJ}$? Le même.
Pour cette raison, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{EJ}$ sont égaux.
3/ Quelle est la nature du quadrilatère $AFJE$? Un parallélogramme.
4/ Que peut-on dire des segments $[AJ]$ et $[EF]$? Ils ont le même milieu.
5/ Citer d'autres vecteurs égaux à $\overrightarrow{AF}$? $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{DI}$.
6/ a/ Proposer un repère (O ; I, J) adapté à la figure puis lire les coordonnées de A et de F dans ce repère ?
$A(2\,;5)$ et $F(11\,;8)$.
b/ Quelles coordonnées peut-on donner au vecteur $\overrightarrow{AF}$ et quel lien avec les coordonnées de A et de F ?
$\overrightarrow{AF}(9\,;3)$; $\overrightarrow{AF}\left(x_F - x_A\,;y_F - y_A\right)$.

II/ Définition d'une translation et d'un vecteur

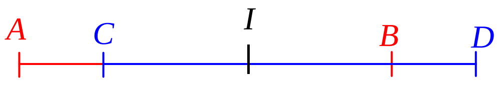
Définition : A et B désignent deux points du plan.
La **translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$** transforme A en B et transforme aussi tout point C en l'unique point D tel que les segments $[BC]$ et $[AD]$ ont le même milieu.

1er cas : $C \notin (AB)$.



$ABDC$ parallélogramme

2ème cas : $C \in (AB)$.



$ABDC$ parallélogramme aplati

Définition :

Le **vecteur $\overrightarrow{AB}$** est caractérisée par :

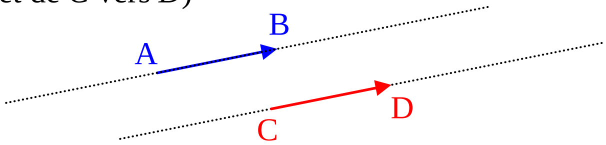
- sa direction : celle de la droite (AB).
- son sens : celui de A vers B.
- sa longueur, appelée aussi **norme** : AB.

Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point A est appelé l'origine et le point B l'extrémité.

Conséquence :

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** lorsque :

- les droites (AB) et (CD) sont parallèles,
- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même **sens** (de A vers B et de C vers D)
- ils ont même **longueur** ($AB = CD$)



Théorème : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, le quadrilatère $AB\boldsymbol{DC}$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Remarques :

- Lorsque les points A et B sont confondus, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul, vecteur noté $\vec{0}$.

Autrement dit, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

- Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur - $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{BA}$. (Le sens est opposé)
- On peut noter un vecteur par une seule lettre : $\vec{u}$, $\vec{v}$, …
- Pour représenter un vecteur $\vec{u}$, on peut choisir n'importe quel point comme origine.
- Une fois choisie une origine A, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.

Autrement dit, si $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}$, alors $M = N$.

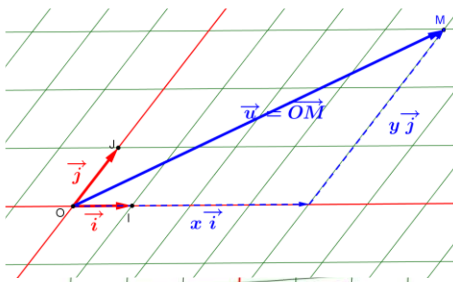
III/ Coordonnées d'un vecteur dans un repère

1/ Définition

Définition :

$(O ; I, J)$ étant un repère du plan alors le triplet $(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ correspond au même repère du plan.

Remarque : autre notation d'un repère : (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) avec $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.



Définition : Dans un repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

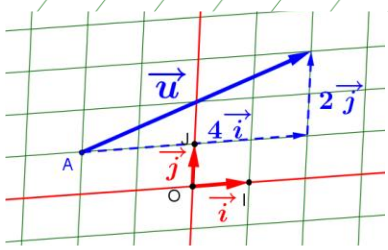
Ainsi, si $M(x ; y)$ alors $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $(x ; y)$.

Ceci se note : $\vec{u} = x\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$.

Exemple :

$\vec{u}$ a pour **coordonnées (4;2)** dans le repère (O ;$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) signifie que $\vec{u} = OM$ avec $M(4 ; 2)$.

1/ Placer ci-contre le vecteur $\vec{u}$**(4;2)** d'origine $A(-2;1)$.



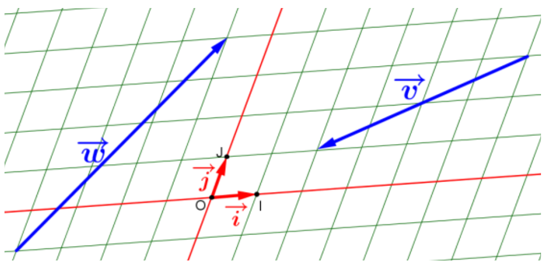
Remarque :

$\vec{u}$ a pour **coordonnées (4;2)** peut se noter $\vec{u}$**(4;2)** ou aussi $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

2/ Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tracés ci-dessous :

$\vec{v}$(3;4).

$\vec{w}$(-4;-2).



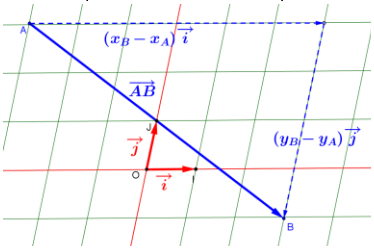
2/ Propriété des coordonnées

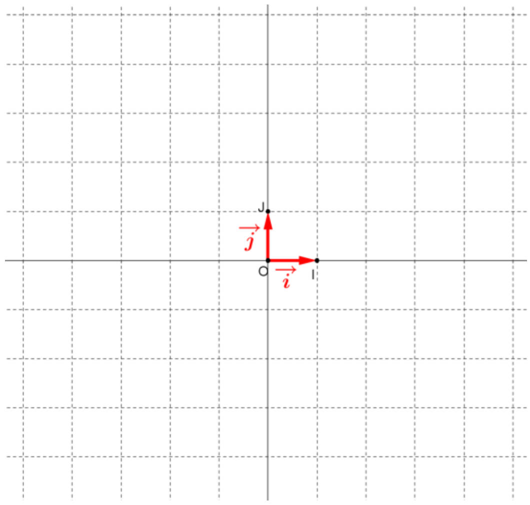
Égalité de vecteurs : Dire que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **égaux** revient à dire que leurs coordonnées respectives sont égales, c'est à dire : $x = x'$ et $y = y'$, ce qui peut s'écrire : $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

3/ Calculs sur les coordonnées d'un vecteur dans un repère quelconque

Propriété : $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ sont deux points.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\right)$.





Exemple : soient $A(3\,;\,-1)$ et $B(-5\,;\,4)$ dans un repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

1/ Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\right)$ donc $\overrightarrow{AB}(-5-3\,;\,4-(-1))$ soit $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}(-8;5)}$.

2/ Vérifier sur la figure ci-contre les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: