LES LOIS A DENSITES : loi uniforme.

On passe d'un **modèle discret** (par exemple la loi binomiale où les valeurs possibles pour la variable aléatoire sont des nombres entiers) à un **modèle continu** (il y a une infinité de valeurs possibles pour la variable aléatoire).

On peut faire le rapprochement avec les statistiques où l'on différencie l'étude d'un caractère discret (par exemple l'âge en années) avec celui d'un caractère continu (le poids d'une personne).

Pour comprendre la loi uniforme, on peut penser à des exemples du type :

- Prendre un nombre au hasard entre deux nombres (il y a une infinité de valeurs)
- La probabilité d'atteindre une cible avec des fléchettes (la probabilité va être définie par des zones d'aires).
- La probabilité pour une voiture de tomber en panne entre deux points.

L'instruction Ran#, NbrAléat ou rand suivant le modèle de calculatrice ou ALEA( ) pour un tableur permet d'obtenir des nombres pseudo-aléatoires, c'est-à-dire une suite de nombres décimaux de l'intervalle [0, 1] qui s'approchent statistiquement de ce qui peut être considéré comme résultat du seul hasard, la notion de hasard étant très difficile à définir d'un point de vue théorique.

L'idéal serait de créer une suite de nombres compris entre 0 et 1, chacun ayant la même chance d'apparaître.

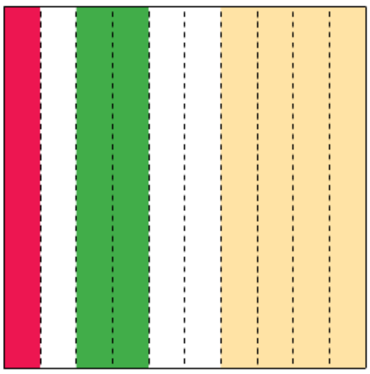
Nous savons, avec le lancer d'un dé bien équilibré, qu'il est possible d'obtenir les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 de façon équiprobable, la probabilité d'obtenir chacun étant $\frac{1}{6}$.

De manière plus générale, le prélèvement au hasard d'une boule dans une urne contenant n boules indiscernables au toucher correspond à une équiprobabilité, la probabilité d'obtenir chaque boule étant $\frac{1}{n}$.

Mais ici l'intervalle [0, 1] a une infinité d'éléments et attribuer une probabilité non nulle, même très petite, à l'obtention de chaque nombre de l'intervalle [0, 1] est en contradiction avec la définition d'une probabilité car $P(\Omega) = 1$.

On est donc amené à choisir un autre modèle pour définir des probabilités d'événements lorsque l'univers Ω des possibles a une infinité d'éléments.

Considérons l'expérience aléatoire consistant à lancer une fléchette sur une cible carrée en considérant que la fléchette atteint la cible à chaque lancer et que tous les points de la cible ont, en théorie, la même chance d'être atteints.



La probabilité que la fléchette atteigne la cible est $P(\Omega) = 1$ et on peut supposer que la probabilité que la fléchette atteigne une partie de la cible est proportionnelle à l'aire de cette partie.

Divisons la cible en dix bandes rectangulaires de mêmes dimensions (voir la figure).

Alors la probabilité que la fléchette atteigne un point du rectangle rouge est $P(R) = \frac{1}{10}$ et, de même, pour la partie verte $P(V) = \frac{2}{10}$, pour la partie jaune $P(J) = \frac{4}{10}$ et pour l'ensemble des parties blanches $P(B) = \frac{3}{10}$.

Définitions.

Définition

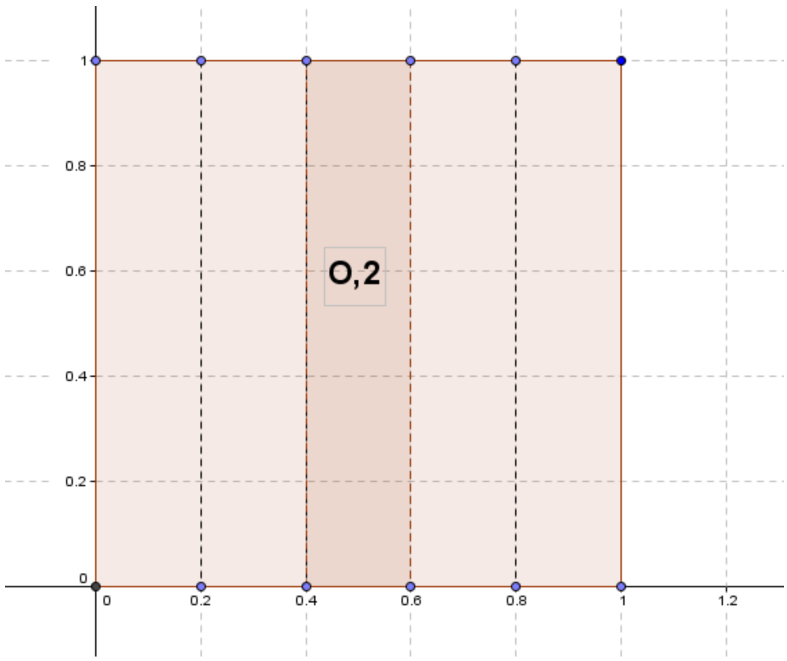
Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur [0,1]**, si et seulement si, pour tout intervalle I inclus dans [0,1], la probabilité de l'évènement « $x \in I$ » est l'aire de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x \in I$ et $0 \leq y \leq 1$.

Exemple.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [O,1].

$$P(u \in [O,2; 0{,}4]) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$$

$$p(u) = 0{,}6 = P(u \in [O,6; 0{,}6]) = 0{,}6 - 0{,}6 = 0$$



Définition

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur [a,b]**, si et seulement si, pout tout intervalle I inclus dans [a,b], la probabilité de l'évènement « $x \in I$ » est l'aire du domaine $\{M(x, y);\ x \in I \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$ où $f: x \to \frac{1}{b-a}$ est la **fonction de densité** de la loi uniforme sur [a,b].

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [a,b]. Pour tout intervalle $[x_1, x_2]$ de [a ;b]

$p(X \in [x_1, x_2]) = \frac{x_2 - x_1}{b-a}$

La **fonction de densité** de la loi uniforme sur [a,b] est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 \quad si\ x < a\ ou\ x > b \end{cases}$$

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire **suivant une loi à densité** définie sur ℝ est la fonction F définie par $F(x) = p(X \leq x)$

La **fonction de répartition** de la loi uniforme sur [a,b] est définie sur ℝ par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 1 & si\ x > b \end{cases}$$

<u>**Exemple :**</u>

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [1 ;4]. La fonction de répartition de la variable U est la fonction définie sur [1 ;4] par $f(x) = \frac{1}{3}$.

$$P(x \in [2;3]) = \frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$$

Variance et écart-type de la loi uniforme sur [a,b]

<u>**Définition.**</u>

L'espérance d'une variable aléatoire X à densité sur [a,b] est

$$E(X) = \int_a^b x \times f(x)dx \quad \text{où } f(x)\ est\ la\ fonction\ de\ densité.$$

L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur [a,b] est $\boldsymbol{E(X) = \frac{a+b}{2}}$

La variance d'une variable aléatoire X à densité sur [a,b] est

$$V(X) = \int_a^b x^2 \times f(x)dx - (E(X))^2 \quad \text{où } f(x)\ est\ la\ fonction\ de\ densité.$$

L'écart type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

La variance d'une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur [a,b] est $\boldsymbol{V(X)} = \frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2}{\boldsymbol{12}}$

Exemple.

Sur une autoroute, deux postes consécutifs de téléphone de secours A et B sont distants de 5 km.

On note la variable aléatoire qui, à tout véhicule tombant en panne entre A et B, associe la distance en km parcourue depuis le poste A.

On suppose que la probabilité de tomber en panne entre A et B est indépendante de la position du véhicule au moment de la panne.

1° Donner la fonction de densité f de la variable aléatoire X.

2° Calculer les probabilités $P(X \in [0, 1])$ et $P(X \in [3, 5])$.

3° a) Calculer l'espérance $E(X)$.

b) Donner une interprétation de $E(X)$ dans le contexte de l'énoncé.

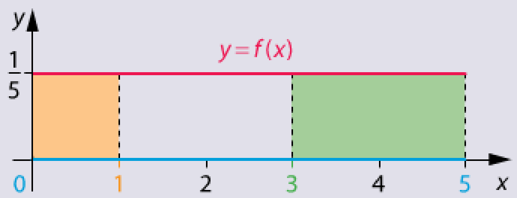
4° Calculer la variante $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

On en déduit que X suit une loi uniforme sur l'intervalle [0,5].

La fonction de densité de X est la fonction définie sur [0,5] par $f(x) = \frac{1}{5}$

1° La fonction de densité de X est la fonction f définie sur [0, 5] par $f(x) = \dfrac{1}{5}$.

2°



$P(X \in [0, 1]) = (1-0) \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}$.

$P(X \in [3, 5]) = (5-3) \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{5}$.

3° a) $E(X) = \int_a^b x\, f(x)\,\mathrm{d}x$, donc ici $E(X) = \int_0^5 \dfrac{x}{5}\,\mathrm{d}x$, $E(X) = \left[\dfrac{x^2}{10}\right]_0^5 = \dfrac{25}{10} = 2{,}5$.

On peut aussi appliquer directement la formule $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Ici $E(X) = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$.

3° a) $E(X)=\int_a^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x$, donc ici $E(X)=\int_0^5 \frac{x}{5}\,\mathrm{d}x$, $E(X)=\left[\frac{x^2}{10}\right]_0^5=\frac{25}{10}=2{,}5.$

On peut aussi appliquer directement la formule $E(X)=\frac{a+b}{2}$.

Ici $E(X)=\frac{5}{2}=2{,}5.$

b) Pour un très grand nombre de véhicules tombant en panne entre A et B, la distance moyenne parcourue depuis le poste A est voisine de 2,5 km.

4° $V(X)=\int_a^b x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x-[E(x)]^2$, donc ici

$V(X)=\int_0^5 \frac{x^2}{5}\,\mathrm{d}x-\left(\frac{5}{2}\right)^2$, donc $V(X)=\left[\frac{x^3}{15}\right]_0^5-\frac{25}{4}$,

$V(X)=\frac{125}{15}-\frac{25}{4}=25\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$,

$V(X)=\frac{25}{12}\approx 2{,}083\,3.$

On peut aussi appliquer directement la formule $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

Ici, $V(X)=\frac{25}{12}\approx 2{,}083\,3.$

Par définition $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$, donc ici $\sigma(X)=\sqrt{\frac{25}{12}}$, $\sigma(X)=\frac{5}{2\sqrt{3}}\approx 1{,}44$.

TD : la loi uniforme.

1. ++ Loi uniforme sur [– 2, 8]

U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-2, 8]$.

1. Donner la fonction de densité de U.

2. Déterminer les probabilités suivantes :

$P(U \in [0, 3]$, $P(-1 \leq U \leq 4)$, $P(|U| \leq 1)$, $P(U \leq 5)$, $P(U = 2)$.

3. **a)** Déterminer l'espérance $E(U)$.

b) Donner une interprétation de $E(U)$.

4. Déterminer la variance $V(U)$.

2. ++ Loi uniforme sur [0, 4]

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 4]$.

1. Donner la fonction de densité de X.

2. Déterminer les probabilités suivantes :

$P(X \in [1, 3]$; $P(X \leq 2{,}5)$; $P(0{,}2 \leq X \leq 3{,}5)$; $P(X \leq 1)$; $P(X = 1)$; $P(X > 1)$.

3. +++ Erreur d'arrondi

1. Soit x un nombre réel et soit y la valeur de x arrondie à l'unité.

On rappelle que l'erreur d'arrondi est alors $\mathrm{e} = x - y$.

Déterminer y et e pour chacune des valeurs suivantes de x :

$x = 4{,}23$; $x = 3{,}6$; $x = 4{,}004$; $x = 3{,}999$; $x = 4{,}499$; $x = 3{,}5$.

2. On note X la variable aléatoire qui, à tout nombre réel tiré au hasard, associe sa valeur arrondie à l'unité.

On admet que X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-0{,}5 ; 0{,}5[$.

a) Donner la fonction de densité de X.

b) Déterminer les probabilités suivantes :

$P(X = 0)$, $P(X < 0)$, $P(X > 0)$, $P(X \in [-0{,}25 ; 0{,}25])$, $P(|X| \leq 0{,}1)$, $P(|X| \leq 0{,}01)$.

c) Déterminer l'espérance $E(X)$.

Donner une interprétation de $E(X)$ et en déduire que la valeur de $E(X)$ était prévisible.

d) Déterminer la variance $V(X)$.

Eléments de correction des exercices.

2.

La fonction de densité *f* de *X* est définie sur $[0\,,\,4]$ par $f(x)=\dfrac{1}{4}$.

2. $P(X\in[1,3])=\dfrac{3-1}{4}=0{,}5$; $P(X\le 2{,}5)=\dfrac{2{,}5}{4}=0{,}625$;

$P(0{,}2\le X\le 3{,}5)=\dfrac{3{,}5-0{,}2}{4}=\dfrac{3{,}3}{4}=0{,}825$.

$P(X\le 1)=\dfrac{1}{4}=0{,}25$; $P(X=1)=0$; $P(X>1)=1-P(x\le 1)=0{,}75$.

3.a) $E(X)=2$.

b) Lorsque la variable aléatoire *X* prend successivement un très grand nombre de valeurs, la moyenne de celles-ci est voisine de 2.

4. $V(X)=\dfrac{(4-0)^2}{12}=\dfrac{16}{12}=\dfrac{4}{3}\approx 1{,}33$.

3.

1. Pour $x=4{,}23$ on a $y=4$ et $e=0{,}23$.

Pour $x=3{,}6$ on a $y=4$ et $e=-0{,}4$.

Pour $x=4{,}004$ on a $y=4$ et e=$0{,}004$.

Pour $x=3{,}999$ on a $y=4$ et $e=-0{,}001$.

Pour $x=4{,}499$ on a $y=4$ et $e=0{,}499$;

Pour $x=3{,}5$ on a $y=4$ et $e=-0{,}5$.

2.a) La fonction de densité *f* de *X* est définie sur $[-0{,}5\,,\,0{,}5[$ par $f(x)=\dfrac{1}{0{,}5-(-0{,}5)}=1$.

b) $P(X=0)=0$; $P(X<0)=0{,}5$; $P(X>0)=0{,}5$;

$P(X\in[-0{,}25\,;0{,}25])=0{,}25-(-0{,}25)=0{,}5$;

$P(|X|\le 0{,}1)=P(-0{,}1\le X\le 0{,}1)=0{,}2$;

$P(|X|\le 0{,}01)=P(-0{,}01\le X\le 0{,}01)=0{,}02$.

c) $E(X)=0$.

Pour un très grand nombre d'arrondis, l'erreur moyenne est voisine de 0.
Ce résultat est prévisible : les erreurs positives et négatives, c'est-à-dire les arrondis par excès et par défaut se compensent.

d) $V(X)=\dfrac{(0{,}5-(-0{,}5))^2}{12}=\dfrac{1}{12}\approx 0{,}08$.

A retenir :

Loi uniforme sur $[a, b]$

- La **fonction de densité** f est définie sur $[a, b]$ par $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{b-a}}$.
- Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$.

Pour tout $[x_1, x_2]$ inclus dans $[a, b]$, $\boldsymbol{P(X \in [x_1, x_2])=\dfrac{x_2-x_1}{b-a}}$.

- L'**espérance** de X est $\boldsymbol{E(X)=\dfrac{a+b}{2}}$.
- La **variance** de X est $\boldsymbol{V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}}$.